∫ntegrando.

CURSOS ACADÉMICOS

Integrando.

CURSOS ACADÉMICOS

Capítulo 1

Conceptos preliminares

Temario del capítulo 1

1.1 Terminología y notación

En álgebra, una letra se usa para representar cualquier número, y se le conoce como literal. El número puede pertenecer a un conjunto particular

$$a, b, c, \ldots x, y, z \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Un número escrito explícitamente junto a una o varias letras se llama coeficiente e indica un producto; los elementos que se multiplican entre sí se llaman factores. Por convención, el coeficiente uno se omite

$3a$ 3 es el coeficiente y a la literal

xy 1 es el coeficiente y xy factores literales

Una expresión algebraica es aquella que consta de términos y factores que pueden contener cualquier número y operación.

1.1 Terminología y notación

Tanto un coeficiente como una literal pueden llevar un exponente, que indica cuántas veces el factor se multiplica por sí mismo. Por convención, el exponente uno no se escribe.

Un término está formado por un signo que precede al coeficiente, junto con la parte literal, de modo que el número de signos indica el número de términos.

Por convención, el signo más se omite si el primer término es positivo.

Exponente

Literal

$$-7a^{2}b^{3}-5x^{2}y\,z^{3}+9xy$$

Signo

Coeficiente

1.1 Terminología y notación

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

Para nombrar un término se usa el prefijo correspondiente a la cantidad de términos: uno-monomio, dos-binomio, tres-trinomio y en general polinomio.

El grado particular de un monomio está dado por el exponente de la literal correspondiente, mientras que el grado absoluto por la suma de los exponentes. Para un polinomio de una sola literal, el grado es igual al exponente mayor.

Por convención, un polinomio debe ordenarse en forma decreciente en el exponente de su literal.

Expresión	Nombre	Grado particular	Grado absoluto
$3x^2y^5$	Monomio	2 respecto a x 5 respecto a y	$2+5=7$
$-3x^5-4x^3+x$	Trinomio	---	5

1.2 Lenguaje algebraico

Las expresiones algebraicas son de utilidad para resolver problemas, por lo que es necesario poder plasmar de forma matemática un enunciado.

Algunas palabras usadas para referirse a conceptos matemáticos son:

1. Operaciones: Suma-adición, resta-diferencia, multiplicación-producto y división-cociente.

2. Coeficientes: 2-doble, 3-triple, 4-cuádruple, $1/2$-mitad, $1/3$-tercera parte, etc.

3. Exponentes: 2-cuadrado, 3-cubo, 4-cuarta potencia o elevado a la cuatro, etc.

Se dice que una literal representa un número cualquiera.

1.2 Ejemplos

1. Escriba la expresión matemática correspondiente a cada enunciado.

   a) Un número cualquiera

   b) La diferencia de dos números cualesquiera

   c) La quinta parte de un número cualquiera

   d) El cubo de un número cualquiera

a) x b) $x - y$ c) $\frac{x}{5}$ d) x^3

1.2 Ejemplos

2. Escriba la expresión matemática correspondiente a cada enunciado.

   a) El cubo de la mitad de un número

   b) La suma de los cuadrados de dos números

   c) El cuadrado de la suma de dos números

   d) El doble de un número aumentado en 3

a) $\left(\frac{x}{2}\right)^3$ b) $a^2 + b^2$ c) $(a + b)^2$ d) $2x + 3$

1.2 Ejercicios

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

1. Escriba la expresión matemática correspondiente a cada enunciado.

   a) La raíz cuadrada de la diferencia de dos números

   b) El cociente de la suma de dos números entre otro

   c) El producto de la suma de dos números por la diferencia de los mismos

   d) El doble de la suma de dos números

   e) La cuarta parte de la cuarta potencia de un número

1.2 Ejercicios

2. Escriba el enunciado correspondiente a cada expresión matemática.

a) $x-3$

b) $2xy$

c) $\frac{x+y}{2}$

d) $(x^2+y^2)(x^3-y^3)$

e) $\sqrt[3]{3(x-y)^2}$

1.3 Términos semejantes

Los términos algebraicos que difieren únicamente en sus coeficientes se llaman semejantes; contienen las mismas literales con iguales exponentes

$$-3x^2y^3, \sqrt{2}x^2y^3 \text{ son semejantes}$$

$$\frac{1}{3}abc, \frac{2\pi}{5}abc \text{ son semejantes}$$

$$5, -8.\overline{3} \text{ son semejantes}$$

En un polinomio donde aparecen términos semejantes es posible reducirlos a uno solo mediante la suma o resta de sus coeficientes

$$10x^2 - 3x^2 - 5x^2 = 2x^2$$

$$3a + 2b - 6a + 5b = -3a + 7b$$

1.4 Suma y resta de polinomios

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

Al sumar o restar expresiones algebraicas aumentamos el número de términos del polinomio, por lo que se debe reducir términos semejantes en lo posible.

En la suma los sumandos conservan sus signos, por ejemplo

sumar $a^3b - b^4 + ab^3$ y $6a^3b - 2a^2b^2 + 4ab^3 + 2b^4$

$$\begin{array}{r} a^3b \qquad\qquad + ab^3 - b^4 \\ 6a^3b - 2a^2b^2 + 4ab^3 + 2b^4 \\ \hline 7a^3b - 2a^2b^2 + 5ab^3 + b^4 \end{array}$$

1.4 Suma y resta de polinomios

En la resta, el sustraendo cambia de signo en todos sus términos. Por ejemplo

restar $a^3 - 3a^2 + 4a - 7$ de $2a^3 + a^2 - 3a - 5$

$$\begin{array}{r} 2a^3 + a^2 - 3a - 5 \\ -a^3 + 3a^2 - 4a + 7 \\ \hline a^3 + 4a^2 - 7a + 2 \end{array}$$

Si aparecen signos de agrupación, basta con usar las leyes de multiplicación de signos y la propiedad distributiva.

Un paréntesis precedido por el signo más puede suprimirse sin hacer cambios, pero uno precedido por signo menos solo se suprime cambiando todos los signos interiores.

1.4 Ejemplos

1. Realice las siguientes sumas de polinomios:

a) $3m - 2n + 4,\ 6n + 4p - 5,\ 8n - 6$ y $m - n - 4p$

b) $3x^2 - 4xy + y^2,\ -5xy + 6x^2 - 3y^2$ y $-6y^2 - 8xy - 9x^2$

a) $4m + 11n - 7$ b) $-17xy - 8y^2$

1.4 Ejemplos

2. Realice las siguientes restas de polinomios:

a) De $5x^2 + 8xy - y^2$ restar $x^2 - 3xy + 4y^2$

b) Restar $a^x - 5a^{x+1} + 2a^{x-1}$ de $2a^x - 5a^{x+1} - 2a^{x-1}$

a) $4x^2 + 11xy - 5y^2$ b) $a^x - 4a^{x-1}$

1.4 Ejemplos

3. Realice las siguientes operaciones:

a) $m-(2mn-m^2)-[m^2-(2mn+3)]$

b) $2x-\{3x-y+5+[8x-(x+y-1)]\}$

a) $m+3$ b) $-8x+2y-6$

1.4 Ejercicios

1. Realice las siguientes sumas y restas:

a) Sumar $35x^2 - 21x - 47$ y $-44x^2 + 89x - 93$

b) Restar $-4a^3b^3 - \frac{1}{10}ab + \frac{2}{3}a^2b^2 - 9$ de $\frac{3}{5}ab + \frac{1}{6}a^2b^2 - 8$

1.4 Ejercicios

1. Realice las siguientes sumas y restas:

c) $12\left(-3x^m + \frac{1}{4}y^m - \frac{2}{3}x^n - y^{m-1}\right) - 15\left(-\frac{1}{5}x^n + \frac{5}{3}y^{m-1} + x^m + 3y^m\right)$

d) $x^2 - \{-xy - [-y^2 + (-x^2 + (-x^2 + 3xy)) - x^2] + y^2\}$

1.5 Multiplicación de polinomios

Para multiplicar expresiones algebraicas, los coeficientes se multiplican entre ellos en la forma usual, y para las literales se usan las mismas propiedades de los exponentes vistas para números. Existen tres casos:

1. Monomio por monomio. El producto de dos expresiones de un solo término, y cuyo resultado también es un monomio

$$(3x^2y^3)(-5xy^2) = -15x^3y^5$$

2. Monomio por polinomio. El producto de un término por varios términos; se utiliza la propiedad distributiva y el resultado contiene el mismo número de términos del polinomio

$$5a(6a^2 - 2a + 7) = 30a^3 - 10a^2 + 35a$$

1.5 Multiplicación de polinomios

3. **Polinomio por polinomio**. El producto de dos expresiones de varios términos; la **propiedad distributiva** se aplica **tantas veces** como **términos** tenga el **primer** (o segundo) **factor** y en general el **número de términos resultante** es igual al **producto** de la **cantidad de términos de cada factor**, salvo que sea posible reducir términos semejantes

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(3a-2)(6a+1) = 18a^2 + 3a - 12a - 2 = 18a^2 - 9a - 2$$

Es recomendable **ordenar** los polinomios con **varias literales** en **orden alfabético** y de forma **decreciente** en los **exponentes** para facilitar el producto de polinomios.

1.5 Ejemplos

1. Realice las siguientes multiplicaciones:

   a) $(2a^2b)(-3ab^2)$

   b) $(3x^4y^2z)^2(-2xy^3z^2)^3$

   c) $a^2b(2ax - 3by - 2ab^2)$

a) $-6a^3b^3$ b) $-72x^{11}y^{13}z^8$ c) $2a^3bx - 3a^2b^2y - 2a^3b^3$

1.5 Ejemplos

1. Realice las siguientes multiplicaciones:

d) $(x^2 + xy - 2y^2)(3y^2 - 2xy + x^2)$

e) $(-x^2y)\left(-\frac{2}{3}x^m\right)\left(-\frac{3}{4}a^2y^n\right)$

f) $(a^{n+2}y^{n+1})^2$

d) $x^4 - x^3y - x^2y^2 + 7xy^3 - 6y^4$

e) $-\frac{1}{2}a^2x^{m+2}y^{n+1}$

f) $a^{2n+4}y^{2n+2}$

1.5 Ejemplos

1. Realice las siguientes multiplicaciones:

g) $(x^{a+1}y - 3x^{a}y^{2} + 2x^{a-1}y^{3} - x^{a-2}y^{4})(-3x^{2}y^{m})$

h) $(a^{2} - 2a)(a^{m+2} - 4a^{m} - 2a^{m+1})$

g) $-3x^{a+3}y^{m+1} + 9x^{a+2}y^{m+2} - 6x^{a+1}y^{m+3} + 3x^{a}y^{m+4}$

h) $a^{m+4} - 4a^{m+3} + 8a^{m+1}$

1.5 Ejercicios

1. Resuelva las siguientes multiplicaciones.

a) $(-a^{m+1}b^{n-2})(-4a^{m-2}b^{2n+4})$

b) $(-x^2yz^3)^4\left(5x^{1/3}y^{2/3}z^4\right)^3$

c) $\left(\frac{2}{3}x^4y^2-\frac{3}{5}x^2y^4+\frac{5}{6}y^6\right)\left(-\frac{2}{9}a^2x^3y^2\right)$

1.5 Ejercicios

1. Resuelva las siguientes multiplicaciones.

d) $(x^{n+1} + 2x^{n+2} - x^{n+3})(x^2 + x)$

e) $(a^2 - 2ab + b^2)(a^4 - 3a^2b^2 + a^3b - ab^3 + b^4)$

1.6 División de polinomios

En la división de expresiones algebraicas los coeficientes se dividen en la forma usual, y para las literales usamos propiedades de los exponentes correspondientes. Los tres posibles casos son:

1. Monomio entre monomio. El cociente de dos expresiones de un solo término, y cuyo resultado también es un monomio

$$\frac{-15x^3y^5}{3xy^2} = -5x^2y^3$$

2. Polinomio entre monomio. El cociente de varios términos divididos por uno; se utiliza la propiedad distributiva y el resultado contiene el mismo número de términos del polinomio

$$\frac{30a^3 - 10a^2 + 35a}{5a} = 6a^2 - 2a + 7$$

1.6 División de polinomios

3. Polinomio entre polinomio. El procedimiento es el siguiente:

i. Se ordenan el dividendo y el divisor, según las potencias descendentes de una misma literal. Si falta alguna potencia debe dejarse un espacio en blanco.

ii. Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor. El resultado, que es parte del cociente, se multiplica por todo el divisor y entra a la "galera" con signo opuesto para reducir términos con el dividendo.

iii. El residuo obtenido se toma como nuevo dividendo y se repite el proceso hasta que se tenga un residuo nulo o de grado inferior al divisor.

La división puede no ser exacta si su residuo es distinto de cero y puede expresarse como siempre

$$\frac{Dividendo}{Divisor} = Cociente + \frac{Residuo}{Divisor}$$

1.6 División de polinomios

Por ejemplo: resolver $a^4 - ab^3 - a^3b + b^4 \div ab + b^2 + a^2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2 - 2ab + b^2 \\
\hline
a^2 + ab + b^2 & a^4 - a^3b \quad \underline{\qquad\qquad} \quad - ab^3 + b^4 \\
 & -a^4 - a^3b - a^2b^2 \\
\hline
 & 0 - 2a^3b - a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\
 & + 2a^3b + 2a^2b^2 + 2ab^3 \\
\hline
 & 0 + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\
 & - a^2b^2 - ab^3 - b^4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$\frac{a^4}{a^2} = a^2$$

$$\frac{-2a^3b}{a^2} = -2ab$$

$$\frac{a^2b^2}{a^2} = b^2$$

Por lo tanto $a^4 - ab^3 - a^3b + b^4 \div ab + b^2 + a^2 = a^2 - 2ab + b^2$

1.6 Ejemplos

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

1. Realice las siguientes divisiones:

   a) $-20mx^2y^3 \div 4xy^3$

   b) $(-3x^{2a+3}y^{3a-2}) \div (-5x^{a-4}y^{a-1})$

   c) $\frac{2}{3}a^2b^3c \div -\frac{5}{6}a^2bc^2$

   d) $(3a^3 - 6a^2b + 9ab^2) \div 3a$

a) $-5mx$ b) $\frac{3}{5}x^{a+7}y^{2a-1}$ c) $-\frac{4b^2}{5c}$ d) $a^2 - 2ab + 3b^2$

1.6 Ejemplos

∫ntegrando.
CURSOS ACADÉMICOS

2. Realice las siguientes divisiones:

a) $$\frac{2a^x b^m - 6a^{x+1} b^{m-1} - 3a^{x+2} b^{m-2}}{-2a^3 b^4}$$

b) $$\left(\frac{3}{4}x^3 y - \frac{2}{3}x^2 y^2 + \frac{5}{6}xy^3 - \frac{1}{2}y^4\right) \div \frac{5}{6}xy$$

c) $$(3x^2 + 2x - 8) \div (x + 2)$$

a) $-a^{x-3} b^{m-4} + 3a^{x-2} b^{m-5} + \frac{3}{2}a^{x-1} b^{m-6}$ b) $\frac{9}{10}x^2 - \frac{4}{5}xy + y^2 - \frac{3y^3}{5x}$ c) $3x - 4$

1.6 Ejemplos

3. Realice las siguientes divisiones:

   a) $(x^2 - x - 6) \div (x + 3)$

   b) $(3a^5 + 10a^3b^2 + 64a^2b^3 - 21a^4b + 32ab^4) \div (a^3 - 4ab^2 - 5a^2b)$

a) $x - 4 + \frac{6}{x+3}$

b) $3a^2 - 6ab - 8b^2$

1.6 Ejercicios

1. Resuelva las siguientes divisiones:

a) $5a^{2m-1}b^{x-3} \div -6a^{2m-2}b^{x-4}$

b) $-54x^5y^2z^2 \div -6x^2y^2z^4$

c) $\left(\frac{1}{4}m^4 - \frac{2}{3}m^3n + \frac{3}{8}m^2n^2\right) \div \frac{1}{4}m^2$

d) $\dfrac{2a^m - 3a^{m+2} + 6a^{m+4}}{-3a^2}$

1.6 Ejercicios

2. Resuelva las siguientes divisiones:

a) $(28x^2 - 30y^2 - 11xy) \div (4x - 5y)$

b) $(6m^4 - n^8 - 3m^2n^4 - 4m^3n^2 + 4mn^6) \div (2m^2 - n^4)$

1.6 Ejercicios

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

2. Resuelva las siguientes divisiones:

c) $\left(y^2 + \frac{47}{12}y + \frac{5}{8}\right) \div \left(\frac{3}{2}y + \frac{1}{4}\right)$

d) $\dfrac{a^{x+3} + a^x}{a + 1}$

1.7 Radicales en expresiones algebraicas

También es posible usar las propiedades de los radicales de números para simplificar expresiones algebraicas.

1. Sacar factores del radical. El radicando puede expresarse como un producto de factores, donde uno tenga como exponente el índice de la raíz

$$\sqrt[3]{8x^6y^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 \cdot y^2} = 2x^2y\sqrt[3]{y^2}$$

2. Reducir el índice de la raíz. Expresando el radical como exponente fraccionario

$$\sqrt[6]{x^2} = x^{2/6} = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

3. Suma y resta de radicales. Cuando se tienen dos o más radicales semejantes

$$2\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 3\sqrt{x} = (2 + 5 - 3)\sqrt{x} = 4\sqrt{x}$$

1.7 Radicales en expresiones algebraicas

4. Multiplicación o división de radicales con diferente índice. Encontrar el mínimo común múltiplo de los índices y después los exponentes con fracciones equivalentes

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}=x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{3}{6}}\cdot y^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{x^3y^2}$$

5. Introducir factores al radical. Expresando el factor con exponente y raíz iguales

$$\sqrt[3]{y\cdot\sqrt{z}}=\sqrt[3]{\sqrt{y^2}\cdot\sqrt{z}}=\sqrt[3]{\sqrt{y^2z}}=\sqrt[6]{y^2z}$$

6. Racionalización. Para eliminar radicales del denominador

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}=\frac{1-\sqrt{x}}{1^2-(\sqrt{x})^2}=\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$$

1.7 Ejemplos

1. Simplifique las siguientes raíces.

a) $\left(3\sqrt{x^2y^3}\right)\left(-5\sqrt{x^4y^5}\right)$

b) $\dfrac{\sqrt{49x^7y^6}}{\sqrt{25x^3}}$

c) $\sqrt{48xy^6z^3}$

d) $\sqrt[6]{x^2}$

a) $-15x^3y^4$ b) $\frac{7}{5}x^2y^3$ c) $4y^3z\sqrt{3xz}$ d) $\sqrt[3]{x}$

1.7 Ejemplos

2. Simplifique los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{z^2}}$

b) $4\sqrt{12x^4y} - 5\sqrt{3x^2y} + \sqrt{75x^6y^3}$

c) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2b}$

a) $\sqrt[6]{z}$

b) $(5x^3y + 8x^2 - 5x)\sqrt{3y}$

c) $a\sqrt[12]{a^5b^4}$

1.7 Ejemplos

3. Simplifique lo siguiente.

a) $\sqrt{x^3\sqrt[3]{y}}$

b) $\dfrac{5}{\sqrt{9y}}$

c) $\dfrac{y-2}{\sqrt{y}-\sqrt{2}}$

a) $x\sqrt[6]{x^3y}$ b) $\frac{5\sqrt{y}}{3y}$ c) $\sqrt{y}+\sqrt{2}$

1.7 Ejercicios

1. Resuelva y simplifique lo siguiente.

a) $\frac{\sqrt{a}}{5}\left(\sqrt{b}-\frac{4}{3}\sqrt{a}\right)$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$

c) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{27x^4y}$

d) $3\sqrt[4]{25x^2y^2}$

1.7 Ejercicios

2. Resuelva y simplifique lo siguiente (racionalice denominadores).

a) $3\sqrt{x^4y} + x\sqrt{4x^2y} - x^2\sqrt{9y}$

b) $2xy\sqrt[4]{\dfrac{81a^2}{4x^3y}}$

1.7 Ejercicios

2. Resuelva y simplifique lo siguiente (racionalice denominadores).

c) $\sqrt[4]{25x^2y^3} \cdot \sqrt[6]{125x^2}$

d) $\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$