∫ntegrando.

CURSOS ACADÉMICOS

Integrando.
CURSOS ACADÉMICOS

Capítulo 2

Productos notables

Temario del capítulo 2

2.1 Binomio al cuadrado

Un binomio al cuadrado resulta de multiplicar un binomio por sí mismo. Desarrollando obtenemos

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

Combinando ambos signos, podemos escribir

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

El resultado se conoce como trinomio cuadrado perfecto.

Enunciado: "El cuadrado del primero, más (menos) el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo"

2.1 Ejemplos

1. Resuelva los siguientes binomios.

a) $(x+4)^2$

b) $(3a^2+5x^3)^2$

c) $(x-5)^2$

d) $(4a^2-3b^3)^2$

a) $x^2+8x+16$ b) $9a^4+30a^2x^3+25x^6$ c) $x^2-10x+25$ d) $16a^4-24a^2b^3+9b^6$

2.1 Ejercicios

∫ntegrando.
CURSOS ACADÉMICOS

1. Resuelva los siguientes ejercicios.

a) $(7x+11)^2$

b) $(a^{m+1}+a^{2n})^2$

c) $(a-3)^2$

d) $(10x^3-9xy^5)^2$

e) $(x+y+z)^2$

2.2 Binomios conjugados

Dos binomios conjugados son idénticos en sus términos, pero distintos en el signo de uno. El producto de ambos es

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

El resultado se conoce como diferencia de cuadrados.

Enunciado: "El cuadrado del que no cambia de signo, menos el cuadrado del que cambia de signo"

2.2 Ejemplos

1. Desarrolle los siguientes productos.

a) $(a + x)(a - x)$

b) $(2a + 3b)(2a - 3b)$

c) $(5a^{n+1} + 3a^m)(3a^m - 5a^{n+1})$

d) $(x + y + w)(x + y - w)$

a) $a^2 - x^2$ b) $4a^2 - 9b^2$ c) $9a^{2m} - 25a^{2n+2}$ d) $x^2 + y^2 - w^2 + 2xy$

2.2 Ejercicios

1. Resuelva los siguientes productos de binomios conjugados.

   a) $(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)$

   b) $(n - 1)(n + 1)$

   c) $(a^m + b^n)(a^m - b^n)$

   d) $(b^{y-1} + 2a^{y+1})(-b^{y-1} + 2a^{y+1})$

   e) $(a + b + c)(a - b - c)$

2.3 Binomios con término común

Integrando.
CURSOS ACADÉMICOS

En un producto de binomios con término común ambos binomios difieren en uno solo de sus términos. En general

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) &= a^2 + ac + ab + bc \\ &= a^2 + a(b+c) + bc\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(a+b)(a+c) = a^2 + a(b+c) + bc$$

El resultado se conoce como trinomio de segundo (cuarto, etc.) grado.

Enunciado: "El cuadrado del común, más el común por la suma de los no comunes, más el producto de los no comunes"

2.3 Ejemplos

1. Realice las siguientes multiplicaciones de binomios.

   a) $(a-11)(a+9)$

   b) $(x^2+7)(x^2+3)$

   c) $(x^3-12)(x^3-3)$

   d) $(2y+5)(2y-1)$

a) $a^2-2a-99$ b) x^4+10x^2+21 c) x^6-15x^3+36 d) $4y^2+8y-5$

2.3 Ejercicios

1. Simplifique las siguientes fracciones:

   a) $(a+1)(a+2)$

   b) $(x^2-1)(x^2-7)$

   c) $(n^3-a)(n^3+1)$

   d) $(5x^2y+25)(-48+5x^2y)$

   e) $(x+y+1)(x+y-3)$

2.4 Teorema del binomio

La forma general del desarrollo de un binomio elevado a una potencia entera positiva $(a+b)^n$ tiene $n+1$ términos.

Los coeficientes pueden determinarse mediante el triángulo de Pascal o con coeficientes binomiales.

Las literales y potencias se encuentran como sigue:

i. El primer término del binomio se coloca en todos los términos, desde la potencia n hasta llegar a 0, disminuyendo de uno en uno

$$\_\_a^n + \_\_a^{n-1} + \_\_a^{n-2} + \cdots + \_\_a^2 + \_\_a + \_\_a^0$$

2.4 Teorema del binomio

ii. El segundo término comienza con exponente 0 y va subiendo en uno hasta llegar a n

$$\_\_b^0 + \_\_b + \_\_b^2 + \cdots + \_\_b^{n-2} + \_\_b^{n-1} + \_\_b^n$$

Los signos:

a) Serán todos positivos si el binomio es $(a+b)^n$

$$\_\_a^n b^0 + \_\_a^{n-1} b + \_\_a^{n-2} b^2 + \cdots + \_\_a^2 b^{n-2} + \_\_ab^{n-1} + \_\_a^0 b^n$$

b) Serán intercalados, comenzando con signo positivo, si es $(a-b)^n$

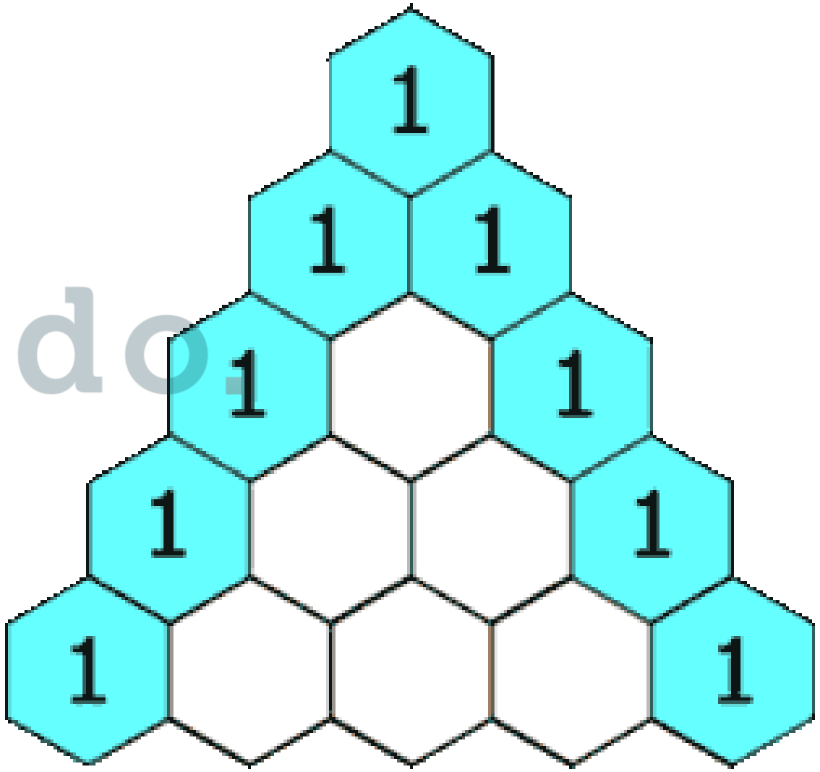
$$\_\_a^n b^0 - \_\_a^{n-1} b + \_\_a^{n-2} b^2 - \cdots + \_\_a^2 b^{n-2} - \_\_ab^{n-1} + \_\_a^0 b^n$$

2.4 Teorema del binomio

1. **Triángulo de Pascal**: Los coeficientes (espacios en blanco) corresponden con los números del $n+1$ renglón del triángulo de Pascal.

   Se construye colocando "1" al inicio y final, y sumando los pares consecutivos de números del renglón anterior.

   El renglón 3 corresponde a los coeficientes del binomio al cuadrado, el 4 para el binomio al cubo, etc.



2.4 Teorema del binomio

Por ejemplo, para encontrar el desarrollo del binomio al cubo $(a-b)^3$

i. Escribimos 4 términos, comenzando con a^3 y b^0, hasta a^0 y b^3, e intercalando signos

$$\_\_\_a^3 - \_\_\_a^2b + \_\_\_ab^2 - \_\_\_b^3$$

ii. Colocamos los coeficientes del renglón 4 del triángulo de Pascal

$$1a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 1b^3$$

iii. Cuando sea necesario, se elevará a la potencia indicada cada término del binomio y se realizarán los productos indicados. El resultado es un cubo perfecto

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

2.4 Teorema del binomio

2. Coeficientes binomiales: El factorial de n es el número $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ que es el producto de todos los enteros consecutivos desde 1 hasta n, donde $0! = 1! = 1$. Un coeficiente binomial se define mediante la operación

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

El desarrollo general de un binomio en términos de coeficientes binomiales es

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

donde el r −ésimo término del desarrollo es igual a

$$\binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

2.4 Teorema del binomio

Por ejemplo, para encontrar el cuarto término del desarrollo de $(a+2b)^5$

i. Determinamos n (la potencia del binomio) y r (la posición del término)

$$n = 5,\ r = 4$$

ii. Calculamos el coeficiente binomial

$$\binom{5}{4-1} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10$$

iii. Añadimos las literales (que también pueden llevar coeficientes)

$$10a^{5-4+1}(2b)^{4-1} = 10a^2(2b)^3 = 80a^2b^3$$

2.4 Ejemplos

Integrando.
CURSOS ACADÉMICOS

1. Resuelva lo siguiente:

a) $(x+y)^4$

b) $(3x^2-2y)^3$

c) $(2x^2+3y^4)^5$

a) $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ b) $27x^6-54x^4y+36x^2y^2-8y^3$

c) $32x^{10}+240x^8y^4+720x^6y^8+1080x^4y^{12}+810x^2y^{16}+243y^{20}$

2.4 Ejemplos

2. Encuentre lo que se pide.

a) Término 3 del desarrollo de $(a-2x)^5$

b) Término 5 del desarrollo de $\left(2x^2-\frac{xy}{2}\right)^9$

a) $40a^3x^2$ b) $252x^{14}y^4$

2.4 Ejercicios

1. Resuelva los siguientes binomios.

a) $(a+2b)^5$

b) $\left(\frac{2a}{x^2}-\frac{x^2}{2a}\right)^4$

c) $(2x^2-3y^3)^6$

2.4 Ejercicios

1. Resuelva los siguientes binomios.

   d) Octavo término de $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^{12}$

   e) Séptimo término de $\left(\frac{a}{2}-x^2\right)^{11}$