∫ntegrando.

CURSOS ACADÉMICOS

Capítulo 3

Factorización

Temario del capítulo 3

3.1 Factor común

La factorización consiste en escribir una expresión como un producto de varios factores. Para expresiones algebraicas buscamos un producto de polinomios de cualquier tipo.

El primer caso consiste en determinar un factor común monomio, el cual divida de forma exacta a todos los términos del polinomio.

Se deben buscar los factores que aparezcan en todos los términos del polinomio para reescribirlo como el producto de un monomio por un polinomio.

3.1 Factor común

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

Usaremos el polinomio $2x^2y - 4x^3y^2$ como ejemplo:

1. Buscar las literales que se hallen en todos los términos y con menor exponente

$$x^2y$$

2. Encontrar el MCD de los coeficientes del polinomio

$$\mathrm{MCD}(2,4) = 2$$

3. Abrir un paréntesis y escribir términos que, multiplicados por el factor común, resulten en los del polinomio original

$$2x^2y(1 - 2xy)$$

3.1 Ejemplos

1. Factoriza las siguientes expresiones.

a) $10a^2 - 5a + 15a^3$

b) $18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2$

c) $6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3$

a) $5a(3a^2 + 2a - 1)$ b) $18my^2(-3mx^2 + x + 2)$ c) $3xy^3(-n^2x^3 + 4nx^2 - 3nx + 2)$

3.1 Ejercicios

∫ntegrando.
CURSOS ACADÉMICOS

1. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $24a^2xy^2 - 36x^2y^4$

b) $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3 + 48m^5n^4$

c) $x(a+1) - a - 1$

d) $3x(x-2) - 2y(x-2)$

3.2 Agrupación

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

El método de agrupación consiste en encontrar factores que sean comunes solo a la mitad de términos del polinomio y luego expresarlo como un producto de dos polinomios.

Como ejemplo factoricemos

$$ax + bx - ay - by$$

1. Identificar qué términos comparten un factor común y factorizarlos

$$ax + bx = x(a + b)$$

$$-ay - by = y(-a - b)$$

3.2 Agrupación

2. Verificar que los términos dentro de paréntesis sean iguales en ambos; de no ser así, factorizar signos o buscar otro factor común

$$x(a+b)$$

$$y(-a-b) = -y(a+b)$$

3. Agrupar en paréntesis los monomios y multiplicar por el factor común polinomial

$$x(a+b) - y(a+b) = (x-y)(a+b)$$

3.2 Ejemplos

1. Factoriza las siguientes expresiones.

a) $2x^2 - 3xy - 4x + 6y$

b) $ax - ay + az + x - y + z$

c) $a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y$

a) $(2x - 3y)(x - 2)$ b) $(x - y + z)(a + 1)$ c) $(x - 2y)(a^2 - ax + x^2)$

3.2 Ejercicios

1. Factoriza los siguientes polinomios.

   a) $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$

   b) $2x^2y + 2xz^2 + y^2z^2 + xy^3$

   c) $2am - 2an + 2a - m + n - 1$

   d) $a^3 + a + a^2 + 1 + x^2 + a^2x^2$

3.3 Trinomio cuadrado perfecto

Un TCP es el resultado de un binomio al cuadrado. Para factorizar $a^2 - 2ab + b^2$:

1. Al menos dos términos deben ser positivos

$$a^2, b^2$$

2. Los términos positivos deben tener raíz cuadrada exacta

$$\sqrt{a^2} = a, \qquad \sqrt{b^2} = b$$

3. El término restante debe ser el doble del producto de las raíces

$$2(a)(b) = 2ab$$

4. Los términos del binomio son las raíces y el signo del término sobrante

$$(a - b)^2$$

3.3 Ejemplos

1. Factoriza las siguientes expresiones.

a) $4x^2 + 25y^2 - 20xy$

b) $x^2 - 12x + 36$

c) $x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$

d) $\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9}$

a) $(2x - 5y)^2$ b) $(x - 6)^2$ c) $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$ d) $\left(\frac{b}{3} - \frac{1}{2}\right)^2$

3.3 Ejercicios

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

1. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $1 + 14x^2y + 49x^4y^2$

b) $1 + a^{10} - 2a^5$

c) $16a^4 - 24a^2b + 9b^2$

d) $100x^{10} - 60a^4x^5y^6 + 9a^8y^{12}$

3.4 Diferencia de cuadrados

Un binomio cuyos términos se restan y tienen raíces exactas es una diferencia de cuadrados; resulta de un producto de binomios conjugados.

Por ejemplo $a^2 - b^2$:

1. Calcular la raíz cuadrada de cada término

$$\sqrt{a^2} = a, \qquad \sqrt{b^2} = b$$

2. Escribir dos binomios conjugados con las raíces calculadas, respetando el signo del positivo y del negativo

$$(a+b)(a-b)$$

3.4 Ejemplos

1. Factoriza las siguientes expresiones.

a) $49x^2y^6z^{10} - a^{12}$

b) $\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{b^4}{9}$

c) $(a + b)^2 - c^2$

d) $(a + x)^2 - (a + 2)^2$

a) $(7xy^3z^5 + a^6)(7xy^3z^5 - a^6)$ b) $\left(\frac{a}{2} + \frac{b^2}{3}\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{b^2}{3}\right)$ c) $(a + b + c)(a + b - c)$ d) $(2a + x + 2)(x - 2)$

3.4 Ejercicios

1. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $\frac{4}{9} - \frac{y^2}{25}$

b) $1 - 9a^2b^4c^6d^8$

c) $(x + y)^2 - a^2$

d) $(2a + b - c)^2 - (a + b)^2$

3.5 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Un trinomio de 2° grado que no es cuadrado perfecto puede ser factorizado como un producto de binomios con término común.

Como ejemplo $x^2 - 7x + 12$:

1. La raíz del término cuadrático (o de exponente par) será el término común

$$\sqrt{x^2} = x$$

2. En el primer binomio se coloca el signo del término del medio, y en el segundo el producto de los últimos signos

$$(x- \quad)(x- \quad)$$

3.5 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

3. Buscaremos dos números que multiplicados den el último término y

   a) Si los signos son iguales, sumados den el del medio

   b) Si los signos son diferentes, restados den el del medio, colocando el más grande con el signo del mismo término de en medio

$$(4)(3) = 12$$
$$4 + 3 = 7$$

$$(x - 4)(x - 3)$$

3.5 Ejemplos

1. Factoriza las siguientes expresiones.

    a) $x^2 - 2 - x$

    b) $n^2 + 28n - 29$

    c) $x^2 - 11x + 28$

    d) $x^4 + 9x^2 + 18$

a) $(x-2)(x+1)$ b) $(n+29)(n-1)$ c) $(x-7)(x-4)$ d) $(x^2+6)(x^2+3)$

3.5 Ejercicios

1. Factoriza los siguientes polinomios.

   a) $n^2 - 72 - n$

   b) $x^2 + 11x + 10$

   c) $m^4 + m^2 - 156$

   d) $a^2 + 5ab - 36b^2$

3.6 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Similar al caso anterior, pero el término cuadrático lleva un coeficiente distintito de uno. El método es iterativo, hasta encontrar el producto correcto.

Los pasos para factorizar $20x^2 + 7x - 6$ son:

1. Expresar el coeficiente de x^2 y el término independiente como productos de dos factores (puede haber más de una posibilidad)

$$20 = (20)(1) = (10)(2) = (5)(4)$$
$$6 = (6)(1) = (3)(2)$$

2. Escogiendo alguna combinación, se escribe una columna con los dos del término cuadrático y otra con los del independiente (el orden es irrelevante)

$$\begin{matrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{matrix}$$

3.6 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

3. Colocar dos signos diferentes cuando el término independiente sea negativo, y dos iguales cuando sea positivo (sin importar el orden)

$$\begin{array}{ccc} 5 & - & 2 \\ 4 & + & 3 \end{array}$$

4. Multiplicar los números cruzados y simplificar

$$(5)(3) + (4)(-2) = 15 - 8 = 7$$

5. Si el resultado anterior coincide con el coeficiente de x se ha encontrado la solución; si difiere en un signo, basta invertir el orden de los signos y si difiere en coeficiente, habrá que invertir los números o escoger otra combinación

$$(5x - 2)(4x + 3)$$

3.6 Ejemplos

1. Factoriza las siguientes expresiones.

   a) $18a^2 - 13a - 5$

   b) $2x^2 + 5x + 3$

a) $(18a + 5)(a - 1)$

b) $(2x + 3)(x + 1)$

3.6 Ejemplos

1. Factoriza las siguientes expresiones.

c) $6x^2 - 7x - 3$

d) $12x^2 - 30x + 12$

c) $(3x + 1)(2x - 3)$

d) $(6x - 3)(2x - 4)$

3.6 Ejercicios

1. Factoriza los siguientes polinomios.

   a) $3 + 11a + 10a^2$

   b) $12m^2 - 13m - 35$

   c) $3y^2 - y - 2$

   d) $8y^2 - 5ay - 3a^2$

3.7 Cubo perfecto

Un binomio al cubo resulta en un cubo perfecto, un polinomio de cuatro términos cuyos primero y último tienen raíz cúbica exacta (ordenado de mayor a menor grado).

Comencemos con $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$:

1. Obtener la raíz cúbica de los términos de mayor y menor grado

$$\sqrt[3]{x^3} = x, \qquad \sqrt[3]{1} = 1$$

2. Verificamos que uno de los términos sea igual al triple del cuadrado de la primera raíz por la segunda, y otro sea el triple de la primera raíz por el cuadrado de la segunda

$$3(x)^2(1) = 3x^2, \qquad 3(x)(1)^2 = 3x$$

3. Los términos del binomio son las raíces cúbicas y el signo del último

$$(x + 1)^3$$

3.7 Ejemplos

1. Factoriza las siguientes expresiones.

a) $8x^6 + 54x^2y^6 - 27y^9 - 36x^4y^3$

b) $1 + 12a + 48a^2 + 64a^3$

c) $a^9 - 18a^6b^5 + 108a^3b^{10} - 216b^{15}$

a) $(2x^2 - 3y^3)^3$ b) $(1 + 4a)^3$ c) $(a^3 - 6b^5)^3$

3.7 Ejercicios

1. Factoriza los siguientes polinomios.

   a) $27 - 27x + 9x^2 - x^3$

   b) $8 + 12a^2 + 6a^4 + a^6$

   c) $8x^3 - 12x^2y^2 + 6xy^4 - y^6$

   d) $1 - 3b + 3b^2 - b^3$

3.8 Suma y diferencia de cubos

Un binomio cuyos términos se suman o restan y tienen raíces cúbicas exactas forman una suma o diferencia de cubos, respectivamente.

Por ejemplo $x^3 - 8$:

1. Calcular la raíz cúbica de ambos términos

$$\sqrt[3]{x^3} = x, \qquad \sqrt[3]{8} = 2$$

2. Usar las siguientes fórmulas

   a) Para suma: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

   b) Para resta: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$(x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

3.8 Ejemplos

1. Factoriza las siguientes expresiones.

a) $1 + x^3$

b) $27m^6 - 64n^9$

c) $8y^3 + 125$

a) $(x+1)(x^2 - x + 1)$ b) $(3m^2 - 4n^3)(9m^4 + 12m^2n^3 + 16n^6)$ c) $(2y+5)(4y^2 - 10y + 25)$

3.8 Ejercicios

1. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $z^{12} - 125$

b) $64 + b^6$

c) $216x^{30} - 8y^9$

d) $\frac{x^3}{64} - \frac{8}{27}$