Integrando.

CURSOS ACADÉMICOS

CURSOS ACADÉMICOS

Capítulo 3

Potencias y radicales

Temario del capítulo 3

3.1 Potenciación y propiedades de exponentes

Un exponente indica cuántas veces se multiplica por sí mismo un factor llamado base; la potenciación es reemplaza a la multiplicación cuando ésta se efectúa por el mismo número.

La base a con exponente n se representa como

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n-veces}$$

De acuerdo con las leyes de los signos:

1. Un número positivo elevado a cualquier exponente es positivo.
2. Un número negativo con exponente par se vuelve positivo, mientras que con exponente impar será negativo.

3.1 Potenciación y propiedades de exponentes

A continuación estudiaremos las propiedades que cumplen los exponentes (cuando las bases son distintas de cero):

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ multiplicación de bases iguales, sumar exponentes

2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ división de bases iguales, restar exponentes (arriba menos abajo)

3. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ exponente negativo baja (o sube) en fracción y se vuelve positivo

3.1 Potenciación y propiedades de exponentes

4. $a^0 = 1$ cualquier número con exponente cero es igual a uno

5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ al elevar un exponente con otro, se multiplican

6. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ potencia de un producto de bases distintas es producto de bases con mismo exponente

7. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ potencia de un cociente es cociente de bases con mismo exponente

3.1 Ejemplos

1. Demuestre que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. Demuestre que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

3. Demuestre que $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

3.1 Ejemplos

4. Use las leyes de los exponentes para simplificar los siguiente:

   a) $5^3 \cdot 5^2$

   b) $\dfrac{7^4}{7}$

   c) $(3^2)^4$

   d) $(4 \cdot 3)^3$

a) $5^5 = 3125$ b) $7^3 = 343$ c) $3^8 = 6561$ d) $4^3 \cdot 3^3 = 1728$

3.1 Ejemplos

5. Simplifique:

a) $(2^3 \cdot 5^{-2})(2^{-2} \cdot 5^4)$

b) $\dfrac{2^5 \cdot 3^{-4}}{2^3 \cdot 3^{-3}}$

c) $\dfrac{6^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 9^2}$

a) $2 \cdot 5^2 = 50$ b) $\dfrac{2^2}{3} = \dfrac{4}{3}$ c) 3

3.1 Ejemplos

6. Simplifique:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

b) $\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2}}\right)^{-2}$

c) $\left[\frac{2^{-4}}{2^{-2}-2^{-3}}\right]^{-2}$

a) $\frac{2^{3}}{3^{5}}=\frac{8}{243}$ b) $2^{2}\cdot 3^{4}=324$ c) $2^{2}=4$

3.1 Ejercicios

1. Demuestre que $a^0 = 1$

2. Demuestre que $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

3.1 Ejercicios

3. Simplifique:

a) $(3^5 \cdot 5^{-4})(2^3 \cdot 3^{-7} \cdot 5^6)$

b) $\left((-5)^2\right)^3$

c) $\dfrac{7^{-2} \cdot 3^{-2}}{7^{-3} \cdot 3^{-1}}$

d) $\left[\dfrac{2^2}{2^{-2} - 2^{-1}}\right]^2$

3.2 Radicación y propiedades de radicales

La radicación es la operación inversa de la potenciación y consiste en encontrar la raíz de índice n de una cierta base a, llamada radicando.

Se expresa con el símbolo radical $\sqrt{}$ (el índice 2 no se escribe) y se cumple que:

$$\text{Si } b^n = a, \text{ entonces } \sqrt[n]{a} = b$$

Del comportamiento del signo negativo bajo la potenciación, podemos concluir que:

1. No está definida (en el conjunto $\mathbb{R}$) la radicación con índice par a números negativos
2. Con índice impar sí es posible obtener un radical para números negativos

3.2 Radicación y propiedades de radicales

A continuación veremos las propiedades que cumplen los radicales (cuando las bases son distintas de cero):

1. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ un radical representa un exponente fraccionario

2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ producto de raíces con igual índice es raíz del producto de radicandos

3. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ cociente de raíces con igual índice es raíz del cociente de radicandos

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ radical de un radical es una raíz con índice igual al producto de índices

3.2 Radicación y propiedades de radicales

Es posible simplificar un radical al extraer factores, al expresar el radical con un índice menor, o bien, al juntar varios radicales en uno.

1. Para sacar factores del radical es necesario factorizar el radicando, buscando números que tengan raíz exacta, esto es, que aparezcan con un exponente igual al índice de la raíz y usar la propiedad $\sqrt[n]{a^n} = a^{n/n} = a$. Por ejemplo

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

2. Para reducir el índice de la raíz, se debe expresar el radicando con exponente fraccionario y simplificar dicha fracción. Por ejemplo

$$\sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^2} = 3^{2/6} = 3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$$

3.2 Radicación y propiedades de radicales

3. Para la multiplicación o división de radicales con diferente índice es necesario encontrar el mínimo común múltiplo de los índices y después expresar los exponentes con fracciones equivalentes

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{3} = 5^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{3}{6}}\cdot 3^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^3\cdot 3^2} = \sqrt[6]{1125}, \qquad \mathrm{mcm}(2,3) = 6$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{5^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{3}{6}}} = \sqrt[6]{\frac{5^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{25}{8}}$$

4. Para introducir factores en un radical se expresan con un exponente y raíz iguales

$$\sqrt[3]{5\cdot\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{25\cdot 2}} = \sqrt[6]{50}$$

3.2 Ejemplos

1. Exprese en su forma exponencial o radical según corresponda.

   a) $5^{2/3}$

   b) $\sqrt{2^3}$

   c) $4^{-\frac{1}{3}}$

   d) $\sqrt[5]{6^2}$

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $2^{\frac{3}{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ d) $6^{\frac{2}{5}}$

3.2 Ejemplos

2. Use las leyes de los radicales para simplificar:

    a) $\left(2\sqrt{10}\right)\left(-3\sqrt{12}\right)$

    b) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$

    c) $\sqrt{\sqrt[3]{3}}$

a) $-12\sqrt{30}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt[6]{3}$

3.2 Ejemplos

3. Simplifique las siguientes raíces.

   a) $\sqrt[3]{8^2}$

   b) $\sqrt{325}$

   c) $\sqrt[3]{-81}$

   d) $\sqrt[4]{256}$

a) 4 b) $5\sqrt{13}$ c) $-3\sqrt[3]{3}$ d) 4

3.2 Ejemplos

Integrando.
CURSOS ACADÉMICOS

4. Simplifique:

a) $\sqrt[4]{25}$

b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{8}$

c) $\sqrt[4]{2^3\sqrt{5}}$

d) $\left(\sqrt{5^3}\right)^4$

a) $\sqrt{5}$ b) $4\sqrt[6]{2}$ c) $\sqrt[8]{320}$ d) 5^6

3.2 Ejercicios

1. Resuelva las siguientes operaciones con radicales.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{4}$

b) $\dfrac{6 \cdot \sqrt{28}}{\sqrt{63}}$

c) $\sqrt[3]{216}$

d) $\sqrt[3]{-54}$

e) $\sqrt{98}$

3.2 Ejercicios

2. Simplifique en un solo radical.

a) $(8)^{-3/4}(8)^{-1/4}(8)^{1/2}$

b) $\sqrt[4]{36}$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{-4}}$

e) $\sqrt{3\sqrt[3]{4}}$

3.3 Suma y resta de radicales

Cuando se tienen dos o más radicales semejantes, es decir, con los mismos índices y radicandos, es posible agruparlos en uno solo realizando las sumas y restas de sus coeficientes. Por ejemplo

$$2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = (2 + 5 - 3)\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$5\sqrt{3} - 3\sqrt{12} - 2\sqrt{27} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{4 \cdot 3} - 2\sqrt{9 \cdot 3} = 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = -7\sqrt{3}$$

Como vimos en el último ejemplo, será necesario primero simplificar los radicales para tener el mismo radicando en todos.

3.3 Ejemplos

1. Simplifique las siguientes sumas y restas de radicales.

a) $\sqrt{5}-\sqrt{20}+\sqrt{45}$

b) $\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{8}+\sqrt{50}$

c) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{24}-3\sqrt[3]{27}$

a) $2\sqrt{5}$ b) $\frac{35}{6}\sqrt{2}$ c) $-9-\sqrt[3]{3}$

3.3 Ejercicios

1. Simplifique:

a) $\sqrt{3}-\sqrt{27}+\sqrt{48}$

b) $4\sqrt{2}-2\sqrt{18}+3\sqrt{32}-\sqrt{50}$

c) $\sqrt{20}-\sqrt{45}+\sqrt[4]{25}+2\sqrt[6]{125}$

d) $\sqrt[3]{48}+2\sqrt[6]{4}-3\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[6]{36}$

3.4 Racionalización

∫ntegrando.
CURSOS ACADÉMICOS

La racionalización es el procedimiento para eliminar radicales en el denominador; consiste en multiplicar el numerador y denominador de la fracción original por un término igual a la raíz del denominador

$$\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Si el denominador tiene un binomio, entonces se debe multiplicar por su conjugado, usando la regla del producto de binomios conjugados: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\frac{3}{1+\sqrt{2}} = \frac{3\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)} = \frac{3-3\sqrt{2}}{1^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3-3\sqrt{2}}{1-2} = 3\sqrt{2}-3$$

3.4 Ejemplos

1. Racionalizar el denominador de las siguientes fracciones.

a) $\frac{1}{\sqrt{11}}$

b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{\frac{7}{12}}$

a) $\frac{\sqrt{11}}{11}$ b) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{21}}{6}$

3.4 Ejemplos

2. Use racionalización y simplifique:

a) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

c) $3\sqrt{\dfrac{5}{3}}-\sqrt{60}-5\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

a) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ b) $-5-2\sqrt{6}$ c) $-2\sqrt{15}$

3.4 Ejercicios

1. Racionalice las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

c) $\frac{4}{\sqrt{6}-2}$

3.4 Ejercicios

Integrando.
CURSOS ACADÉMICOS

1. Racionalice las siguientes fracciones:

d) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

e) $\frac{1}{2}\sqrt{32}-5\sqrt{\frac{1}{2}}$

3.5 Jerarquía de operaciones

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

Existe un orden en el que se deben de realizar operaciones combinadas de suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces.

En orden descendente y de izquierda a derecha conforme las encontremos, como sigue:

1. Potencias y raíces
2. Multiplicaciones y divisiones
3. Sumas y restas

3.5 Ejemplos

1. Realiza las siguientes operaciones.

   a) $6^2 \div 9 \times 4 + \sqrt{16} \times 3 - 10 \div 5$

a) 26

3.5 Ejemplos

1. Realiza las siguientes operaciones.

b) $\sqrt{5^2 - 3^2} \times 2^2 + \sqrt[3]{8} \times \sqrt{81} \div 18 + \sqrt{18 \times 8}$

b) 29

3.5 Ejemplos

1. Realiza las siguientes operaciones.

c) $-\sqrt{9}-\left\{4^2+3\left[\sqrt[3]{27}+4\times 6\right]-2^3\right\}$

c) -92

3.5 Ejercicios

1. Resuelva las siguientes operaciones.

a) $(5-3)^4 + 4 + \left\{\sqrt{6^2 - 20} + \sqrt{5 \cdot 4 + 16} + (8-4)^2 \cdot 3\right\}$

b) $2 + \{8 \cdot (8-6) + [(3+4) \div 7 - 5 \cdot 6 \div 10] - 5\}$

3.5 Ejercicios

1. Resuelva las siguientes operaciones.

c) $\sqrt{13^2 - 12^2} + (6-4)^2 \cdot 8 - \sqrt{(10-8)^2}$

d) $\left(\sqrt{\frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{1}{36}}\right)^2 \div \frac{1}{3} - 2\left[\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right]^2$