ʃntegrando.

CURSOS ACADÉMICOS

Integrando.
CURSOS ACADÉMICOS

Capítulo 7

Hidrostática e hidrodinámica

Temario del capítulo 7

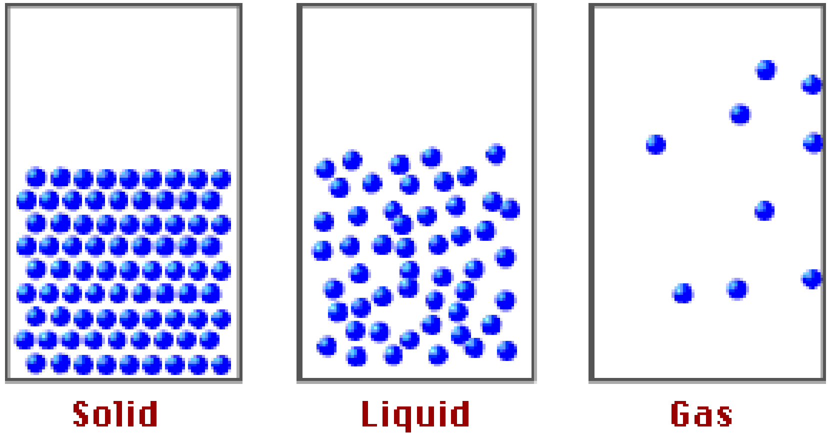
7.1 Densidad y presión

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

De acuerdo con la teoría cinética molecular, la materia se encuentra formada por partículas llamadas moléculas, las cuales:

a) Se encuentran en movimiento con velocidades cambiantes; su energía cinética tiende a separarlas.

b) Poseen energía potencial que tiende a mantenerlas unidas.



7.1 Densidad y presión

Toda la materia existe en uno de los cuatro estados físicos o de agregación:

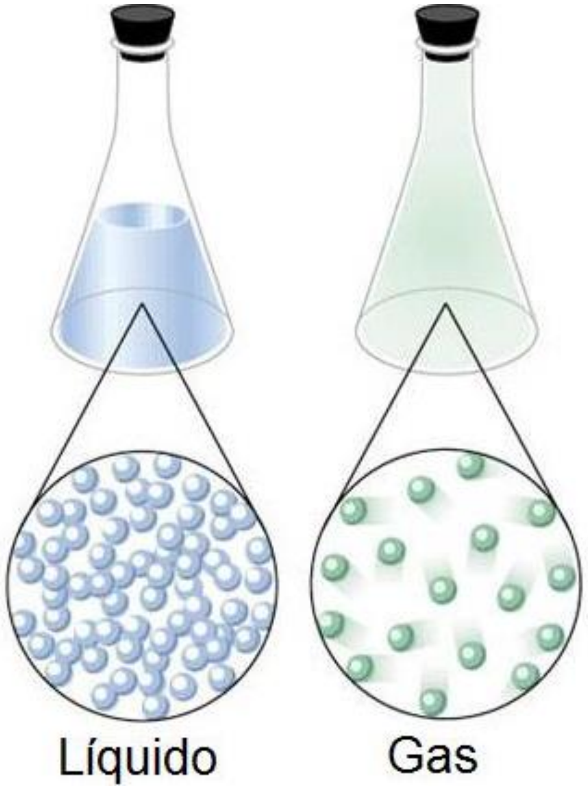
1. Sólido. La energía cinética de sus moléculas es menor que la energía potencial.
2. Líquido. Las energías cinética y potencial de sus moléculas son aproximadamente iguales.
3. Gaseoso. La energía cinética de sus moléculas es mayor que la energía potencial.
4. Plasma. A temperaturas muy altas, los átomos pierden electrones y se origina un gas ionizado (cargado eléctricamente).

7.1 Densidad y presión

El término fluido se usa para designar a las sustancias que adoptan la forma del recipiente que las contiene, es decir, aquellas en estado líquido o gaseoso.

Mientras que los líquidos tienen un volumen definido, los gases pueden comprimirse o expandirse.

La hidrostática estudia las propiedades de los fluidos en reposo.



7.1 Densidad y presión

La densidad es una propiedad que indica la cantidad de materia (su masa) contenida en una región del espacio (su volumen)

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Cada sustancia tiene una densidad absoluta. Mientras que para gases la densidad puede variar con la presión y la altura, para sólidos y líquidos es prácticamente idéntica.

Sus unidades se pueden expresar (SI) en kg/m^3 o g/cm^3, donde

$$1\,\frac{g}{cm^3} = 1 \times 10^3\,\frac{kg}{m^3}$$

7.1 Densidad y presión

Sustancia	$\rho(kg/m^3)$	Sustancia	$\rho(kg/m^3)$
Agua	1×10^3	Hielo	0.92×10^3
Aluminio	2.7×10^3	Glicerina	1.26×10^3
Hierro	7.86×10^3	Alcohol etílico	0.806×10^3
Cobre	8.92×10^3	Benceno	0.879×10^3
Plata	10.5×10^3	Mercurio	13.6×10^3
Plomo	11.3×10^3	Aire	1.29
Oro	19.3×10^3	Oxígeno	1.43
Platino	21.4×10^3	Hidrógeno	8.99×10^{-2}
Uranio	18.7×10^3	Helio	8.99×10^{-1}

7.1 Densidad y presión

La densidad relativa de una sustancia es igual al cociente de su densidad absoluta y la densidad del agua

$$\rho_{rel} = \frac{\rho_{abs}}{\rho_{H_2O}}$$

El peso específico se define como peso por unidad de volumen

$$w_e = \frac{w}{V} = \rho g$$

La densidad relativa es adimensional, y las unidades del peso específico son N/m^3

7.1 Ejemplos

1. Resuelve los siguientes problemas.
   a) Un cubo de madera de roble, de $10\ cm$ de lado, tiene una masa de $710\ g$. ¿Cuál es la densidad del roble?

   b) Calcula la densidad relativa del núcleo de la Tierra si su densidad absoluta es de $9{,}500\ km/m^3$

   c) ¿Cuál es el peso específico de la glicerina?

a) $\rho_{roble} = 710\ kg/m^3$

b) $\rho_{rel} = 9.5$

c) $w_e = 12{,}348\ N/m^3$

7.1 Ejercicios

1. Una alberca cuyas dimensiones son $6\,m \times 3\,m \times 1.5\,m$ está llena de agua. ¿Cuánta agua está contenida en la alberca?

2. Determina el volumen que ocupan $400\,g$ de hierro si su densidad relativa es 7.8

3. ¿Cuál es la densidad de un aceite si su peso específico es de $8{,}200\ N/m^3$?

7.1 Densidad y presión

Se dice que una superficie está sometida a una presión cuando se aplica una fuerza perpendicularmente a todo elemento de ella.

La presión es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional al área

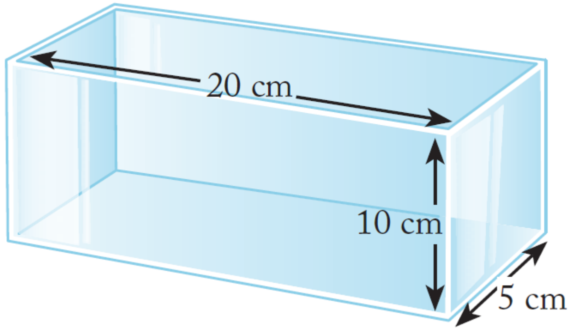
$$P = \frac{F}{A}$$

A mayor área, menor presión

Su unidad de medida es el Pascal: $1\ \mathrm{Pa} = 1\ N/m^2$

7.1 Ejemplos

2. Las dimensiones de un lingote de $11.84\ kg$ son $5\ cm \times 10\ cm \times 20\ cm$. Calcula la presión que ejerce el lingote sobre el suelo si:
   a) Descansa sobre la superficie más pequeña
   b) Descansa sobre la superficie más grande



a) $P = 23.2\ kPa$ b) $P = 5.8\ kPa$

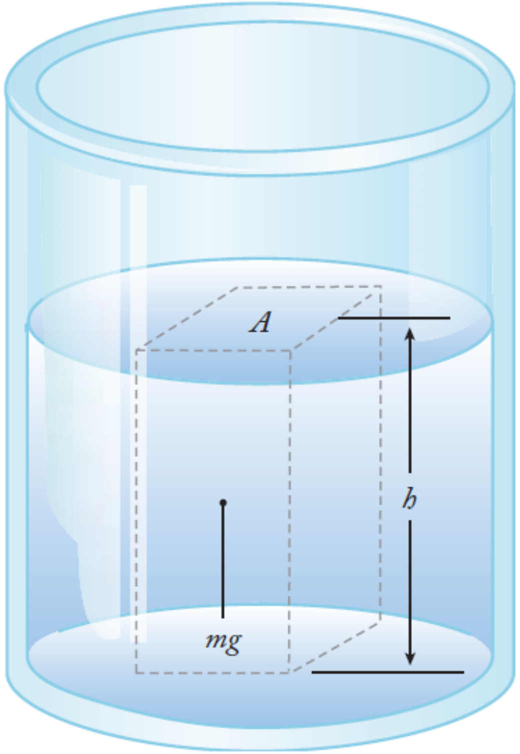
7.1 Ejercicios

4. Cada una de las llantas de un auto de una tonelada descansan sobre el suelo, en una superficie rectangular de $14\ cm \times 20\ cm$. Calcular la presión que el auto ejerce sobre el piso.

5. Las dimensiones de un lingote de plomo son $14\ cm \times 8\ cm \times 5\ cm$. Si la densidad del plomo es de $\rho_{plomo} = 11{,}300\ kg/m^3$, ¿cuál es la presión que ejerce sobre el suelo cuando descansa sobre su superficie más pequeña?

7.2 Principio de Pascal

Debido al peso de sus moléculas, un fluido en reposo ejerce una fuerza sobre la superficie donde descansa.



El peso mg del fluido con densidad ρ actúa perpendicularmente sobre la superficie A.

Si ocupa un volumen $V = Ah$, con masa $m = \rho V$ la presión será

$$P = \frac{mg}{A} = \frac{\rho V g}{A} = \rho g h$$

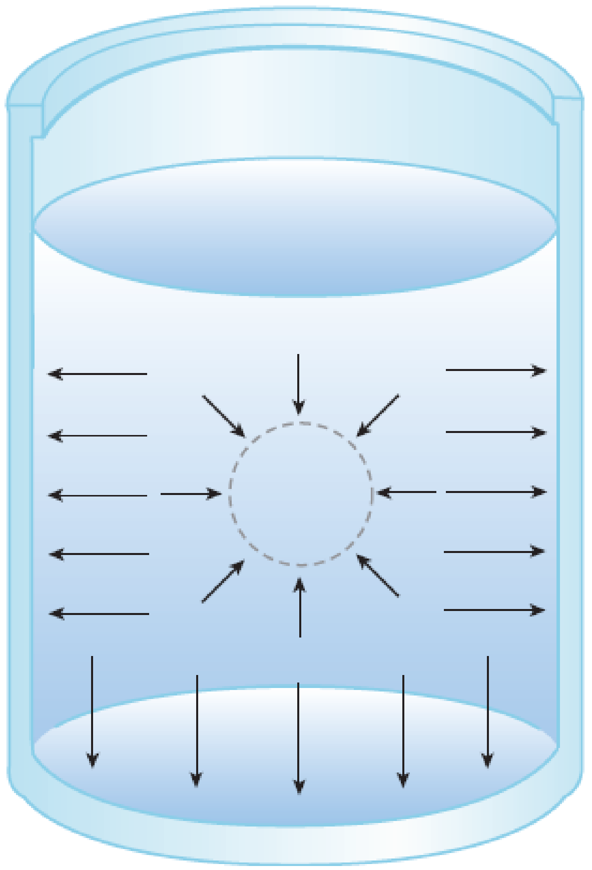
7.2 Principio de Pascal

La presión hidrostática varía en forma directamente proporcional con la densidad y la profundidad

$$P_h = \rho g h$$

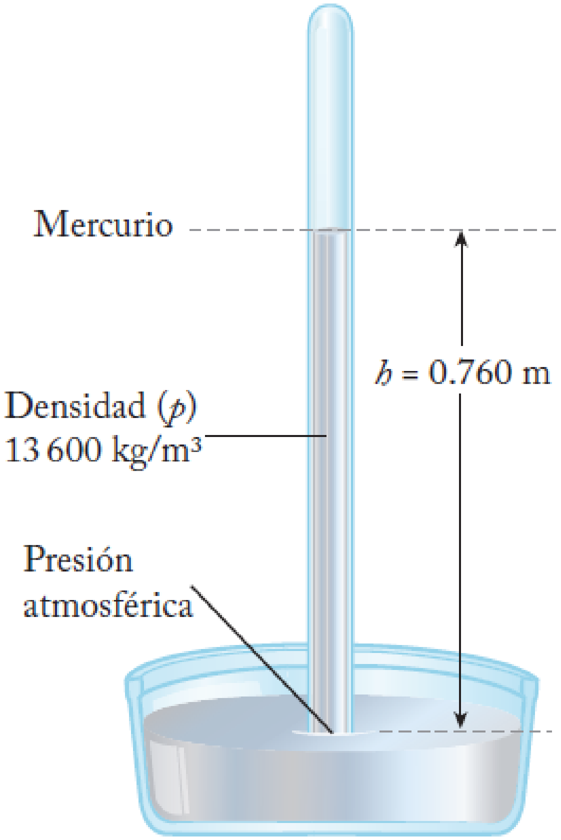
Esta presión es independiente de la forma del recipiente y de la cantidad de líquido contenido.

Puesto que las fuerzas están equilibradas en todas direcciones (reposo), la presión hidrostática es constante en cada punto con la misma altura.



7.2 Principio de Pascal

En la Tierra, los objetos y los seres vivos estamos dentro de una capa de gases que nos presionan continuamente; esto es la presión atmosférica P_{atm}.



A nivel del mar y a $0\,°C$ se define una atmósfera como $1.013\times10^5\ Pa$, o bien $760\ mm\ de\ Hg$ aquella que equilibra una columna de mercurio de $76\ cm$ de altura.

El sistema sanguíneo es capaz equilibrar esta presión.

Además, es la responsable de que se pueda beber con un popote, ya que al extraer el aire con la boca empuja el líquido hacia arriba.

7.2 Principio de Pascal

En un punto cualquiera dentro de un fluido actúa la presión hidrostática y la presión atmosférica. A la suma de estas dos presiones se le conoce como presión absoluta

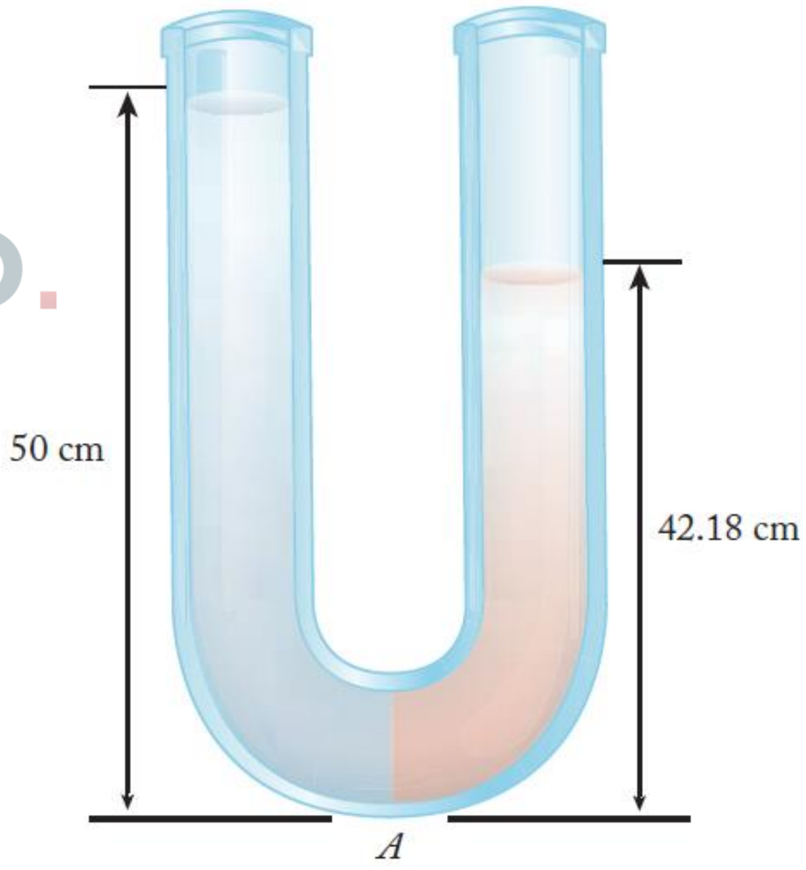
$$P_{abs} = P_{atm} + P_h$$

El manómetro es el instrumento que mide la presión; su función es medir la diferencia entre la presión del fluido y la presión atmosférica. La medición recibe el nombre de presión manométrica

$$P_{man} = P_{abs} - P_{atm}$$

7.2 Ejemplos

1. Una columna de gasolina ($\rho = 680\, kg/m^3$) de $50\, cm$ de altura sostiene otra columna de $42.18\, cm$ de un fluido desconocido. ¿Cuál es la densidad del líquido desconocido?



a) $\rho = 806.1\, kg/m^3$

7.2 Ejemplos

2. Resuelve los siguientes problemas.
   a) Calcula la presión absoluta en el fondo de una alberca de $2\ m$ de profundidad si está cubierta completamente de agua y se encuentra a nivel del mar.

   b) El manómetro de mercurio se usa para medir la presión de un gas dentro de un tanque. Si la diferencia entre los dos niveles de mercurio es de $36\ cm$, ¿cuál es la presión absoluta dentro del tanque?

a) $P_{abs} = 120.9\ kPa$ b) $P_{abs} = 149.3\ kPa$

7.2 Ejercicios

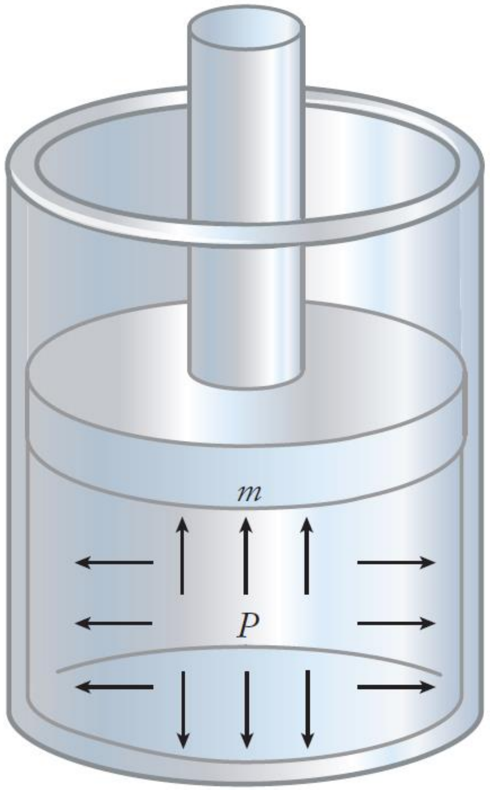
1. Determina la presión hidrostática en el fondo de una cisterna de forma rectangular llena de agua, si sus dimensiones son $7\ m$ de largo, $10\ m$ de ancho y $2\ m$ de altura.

2. ¿A qué profundidad se encuentra un buzo en el interior del océano ($\rho = 1030\ kg/m^3$) si la presión absoluta sobre él es de $222{,}428\ Pa$?

3. Si en un manómetro la diferencia entre los niveles de mercurio es de $20\ cm$, determina la presión absoluta.

7.2 Principio de Pascal

Cualquier incremento de presión en la superficie libre de un fluido, sea por la atmósfera o por un agente externo, debe transmitirse a todo punto.



Principio de Pascal:

Una presión externa aplicada a un fluido encerrado se transmite con la misma intensidad a cualquier punto del fluido y a las paredes del recipiente

Una de las aplicaciones de este principio es la prensa hidráulica, un sistema que confina un fluido entre dos cámaras conectadas por un tubo.

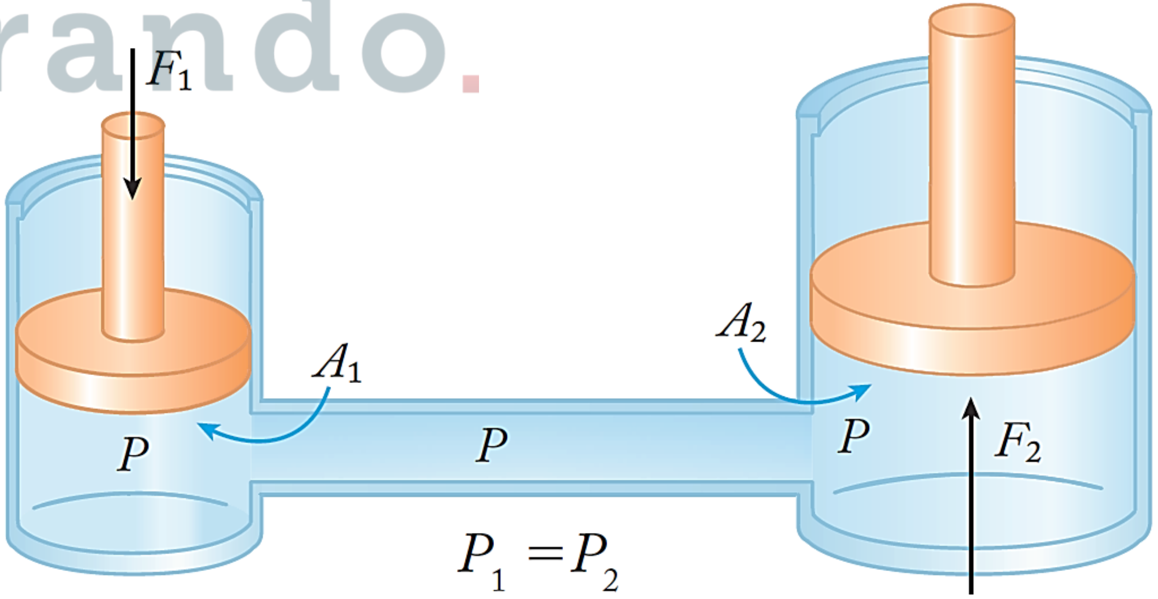
7.2 Principio de Pascal

Cada sección tiene un émbolo de diferente tamaño, libre de desplazarse verticalmente.

Al aplicar una fuerza F_1 sobre el pistón de área A_1, se transmite una presión sobre todo el fluido que alcanza el segundo émbolo de área A_2, y es empujado con una fuerza F_2.

Como la presión en ambas secciones es la misma

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$



7.2 Ejemplos

3. Resuelve los siguientes problemas.
   a) El diámetro del pistón menor de una prensa hidráulica es de $8\ cm$, mientras que el del mayor es $20\ cm$. Si se aplica una fuerza de $600\ N$ en el más pequeño, ¿qué fuerza se ejerce sobre el pistón mayor?

   b) El área del pistón menor de una prensa es de $10\ cm^2$. Si se ejerce en él una fuerza de $100\ N$ y produce una fuerza de $9{,}600\ N$, ¿cuál es el área del pistón grande?

a) $F_2 = 3750\ N$ b) $A_2 = 960\ cm^2$

7.2 Ejercicios

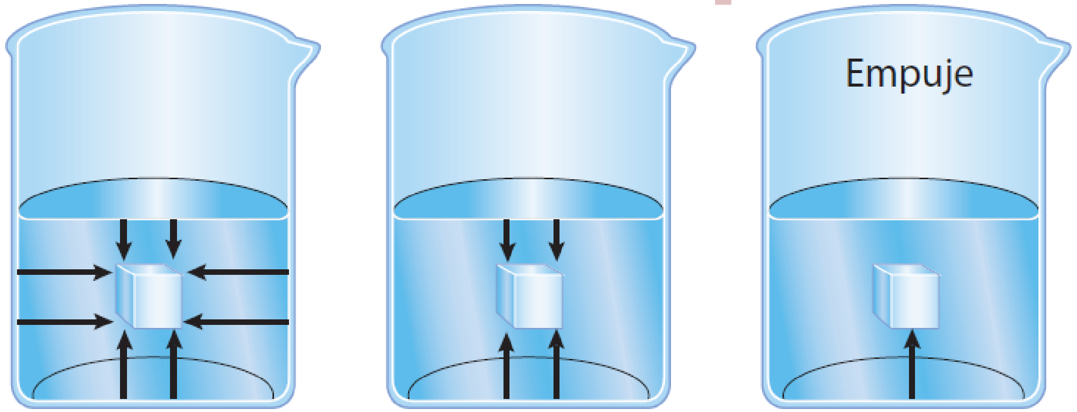
4. El diámetro del pistón mayor de un elevador hidráulico es de $48\ cm$, mientras que el del menor es de $6\ cm$. ¿Qué fuerza se debe aplicar sobre el pistón menor para elevar un automóvil de $10^3\ kg$ sobre el pistón mayor?

5. El diámetro del pistón mayor de una prensa es 4 veces más grande que el diámetro del menor. Si se aplica una fuerza sobre el pistón menor, ¿cuántas veces es mayor la fuerza de salida?

7.3 Principio de Arquímedes

Un objeto sumergido en un fluido en reposo experimenta una presión mayor hacia arriba que hacia abajo, debido a que la presión es más grande en el fondo.

Por tanto, existe una fuerza resultante sobre el objeto llamada empuje, dirigida hacia arriba, y por la cual el objeto aparenta un peso menor.



Aunque las fuerzas (presiones) horizontales se anulan entre sí, existe una fuerza vertical resultante que se dirige hacia arriba.

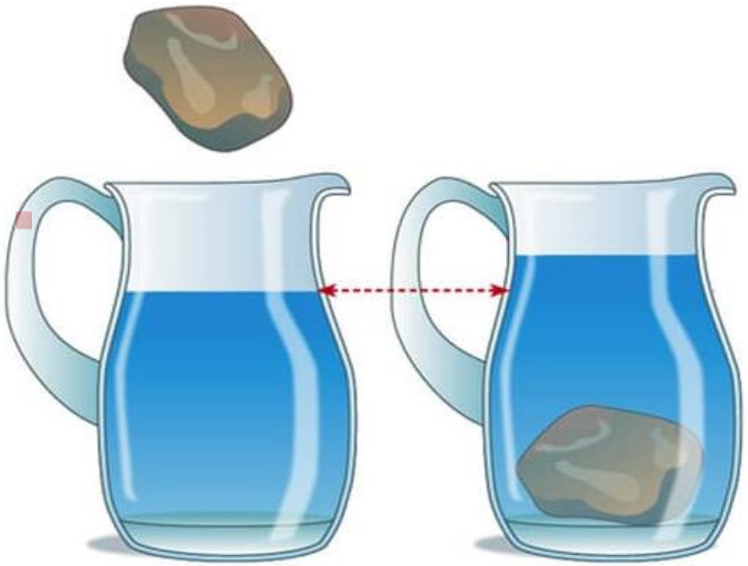
El peso aparente será igual al peso real menos el empuje.

7.3 Principio de Arquímedes

Puesto que *dos cuerpos no pueden ocupar el mismo espacio al mismo tiempo*, el objeto sumergido **desplaza su propio volumen** en el fluido.

Principio de Arquímedes:

Cualquier cuerpo sumergido en un fluido experimenta una fuerza de empuje hacia arriba igual al peso del fluido desalojado



Si $w_f = m_f g$ es el peso del fluido con densidad $\rho_f = \frac{m_f}{V_f}$

$$F_E = m_f g = \rho_f V_f g$$

7.3 Principio de Arquímedes

Usando la segunda ley Newton al objeto de peso $w_o = m_o g$, volumen V_o y densidad ρ_o

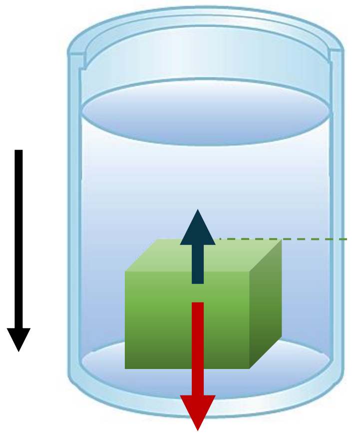
$$\Sigma F_y = F_E - w_o = \rho_f V_f g - \rho_o V_o g$$

1. Si el peso es mayor que el empuje, el objeto sumergido acelera hacia abajo y se hunde

$$\Sigma F_y < 0, V_f = V_o \rightarrow \rho_f V_o g - \rho_o V_o g < 0$$

$$\rho_f < \rho_o$$

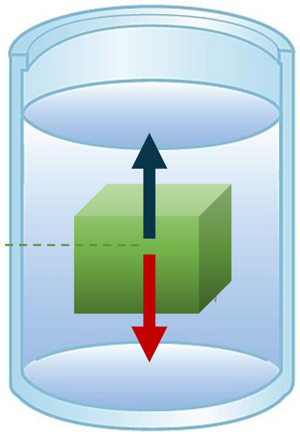
$a < 0$



2. Si el peso y el empuje son iguales, el objeto permanece sumergido en reposo

$$\Sigma F_y = 0, V_f = V_o \rightarrow \rho_f V_o g - \rho_o V_o g = 0$$

$$\rho_f = \rho_o$$



$a = 0$

7.3 Principio de Arquímedes

3. Si el peso es menor que el empuje, el objeto:

i. Se sumerge por completo y comienza a ascender

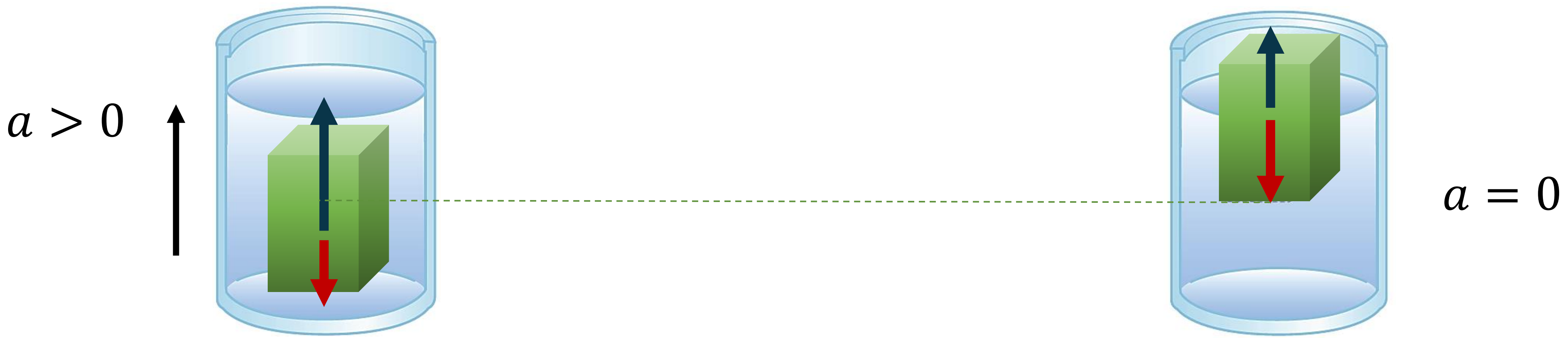
$$\Sigma F_y > 0, V_f = V_o \rightarrow \rho_f V_o g - \rho_o V_o g > 0$$

$$\rho_f > \rho_o$$

ii. Flota, con volumen V_s sumergido parcialmente, en reposo

$$\Sigma F_y = 0, V_f = V_s \rightarrow \rho_f V_s g - \rho_o V_o g = 0$$

$$V_s = \frac{\rho_o}{\rho_f} V_o$$



7.3 Ejemplos

1. Un objeto pesa $40\,N$, pero aparenta pesar $32.8\,N$ cuando se halla sumergido completamente en glicerina. Determina:
   a) La fuerza de empuje.

   b) El volumen del objeto.

   c) La densidad del objeto.

a) $F_E = 7.2\ N$ b) $V_o = 5.83 \times 10^{-4}\ m^3$ c) $\rho_o = 7{,}001.1\ \ kg/m^3$

7.3 Ejemplos

2. Resuelve los siguientes problemas.
   a) Un cubo de hielo flota en una vaso con agua. ¿Qué porcentaje del volumen del hielo permanecerá flotando encima del agua?

   b) Un cilindro de $12\ cm$ de altura flota en el agua de tal modo que emerge $3\ cm$. ¿Cuál es su densidad?

a) 8% b) $\rho_o = 750\ kg/m^3$

7.3 Ejercicios

1. Una piedra pesa $7.8\ N$ en el aire y $4.8\ N$ cuando se sumerge en agua. Calcula la fuerza de empuje, el volumen y la densidad de la piedra

2. ¿Qué volumen de un iceberg queda por debajo del nivel del mar? Considera que el agua de mar tiene densidad $1030\ kg/m^3$ y el hielo $920\ kg/m^3$.

7.4 Flujo, gasto y ecuación de continuidad

La hidrodinámica estudia los fluidos en movimiento. Se denomina flujo al movimiento continuo de un fluido.

Se dice que un fluido es ideal si:

1. No es viscoso. Al no haber fricción interna, fluye sin disipación de energía.

2. Su flujo es estacionario. Cuando la velocidad del fluido en un punto permanece constante en el tiempo.

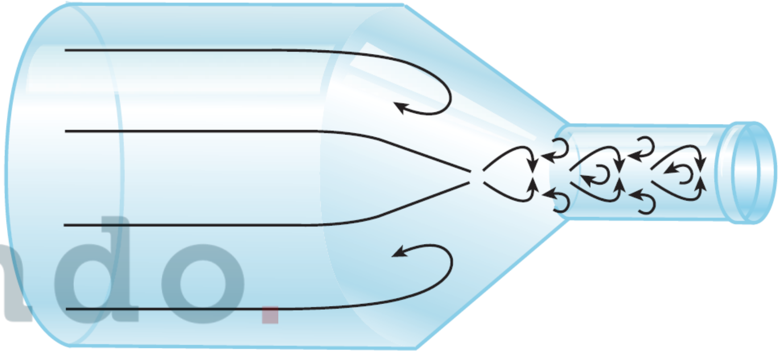
3. Es incompresible. Si la densidad es uniforme, el volumen está definido.

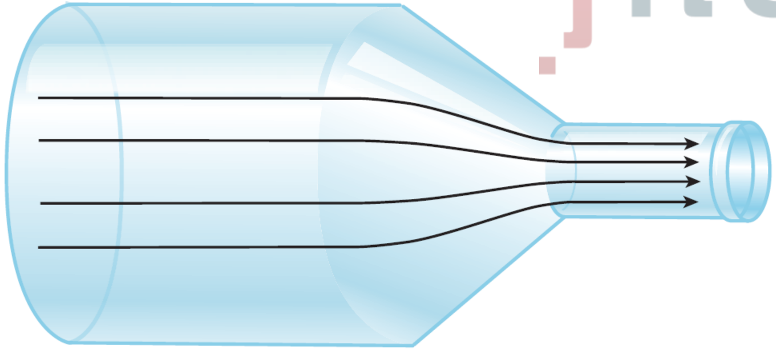
4. Es irrotacional. El fluido solo presenta movimiento de traslación, sin rotaciones.

7.4 Flujo, gasto y ecuación de continuidad

Un flujo laminar se presenta cuando cada partícula del fluido, al pasar por un punto dado, sigue la misma trayectoria que las anteriores; dicha trayectoria es llamada línea de corriente.

Flujo turbulento





Flujo laminar

Cuando el movimiento del fluido es caótico, no uniforme, decimos que es un flujo turbulento, y se caracteriza por la formación de remolinos.

7.4 Flujo, gasto y ecuación de continuidad

Definimos el gasto como el volumen de un líquido que circula a través de la sección transversal de una tubería por unidad de tiempo. Su unidad es m^3/s y su fórmula

$$G = \frac{V}{t}$$

Considerando que el flujo se mueve con rapidez constante v, en un tiempo t recorrerá una distancia $d = vt$. Si el fluido atraviesa una región de área A en ese tiempo, el volumen será $V = Ad = Avt$

El gasto puede reescribirse entonces como el producto del área por la rapidez

$$G = \frac{V}{t} = \frac{Avt}{t} = Av$$

7.4 Ejemplos

1. Resuelve los siguientes problemas.
   a) Calcular el tiempo que tardará en llenarse un tanque cuya capacidad es de $20\ m^3$ al suministrar un gasto de $55\ l/s$.

   b) Por una tubería fluye agua con un gasto de $1.6\ m^3/s$. Determina la rapidez del agua en un punto donde el radio de la tubería es de $0.5\ m$.

a) $t = 363.6\ s$ b) $v = 2.04\ m/s$

7.4 Ejercicios

1. Para llenar un tanque de gasolina se dispone de un gasto de $0.1\ m^3/s$ Si se envía en un tiempo de $2\ min$, ¿cuál es el volumen del tanque?

2. A partir de un depósito terminal de $3\ cm$ de radio fluye agua con una rapidez promedio de $2\ m/s$. ¿Cuál es el gasto en litros por minuto? ¿Cuánto tardará en llenarse un recipiente de $40\ l$?

7.4 Flujo, gasto y ecuación de continuidad

Cuando tenemos un líquido incompresible, la cantidad que entra a una tubería debe ser igual a la que sale $V_1 = V_2$.

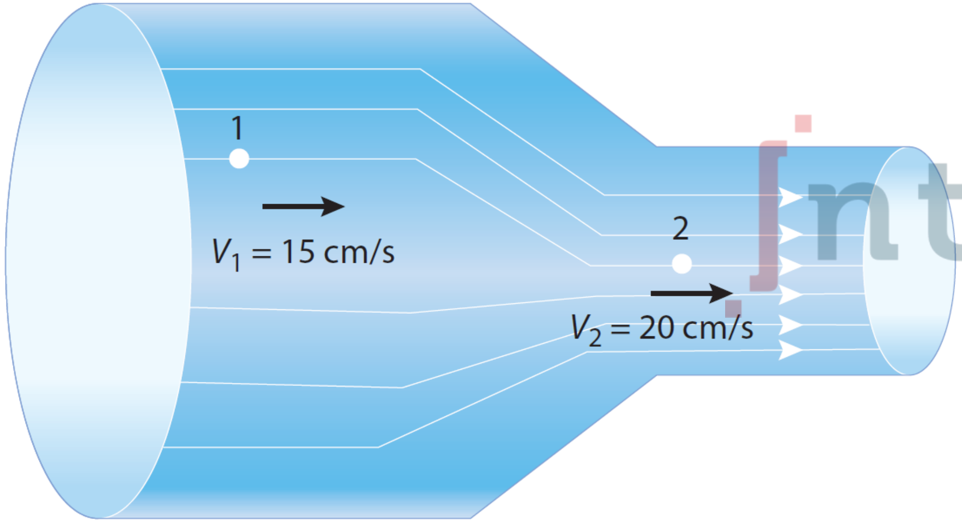
Por ser estacionario, el tiempo que le toma a una porción del fluido entrar es el mismo que le toma en salir $t_1 = t_2 = t$.

Igualando los volúmenes $V_1 = A_1 v_1 t, V_2 = A_2 v_2 t$ y cancelando el tiempo, obtenemos la ecuación de continuidad

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

7.4 Flujo, gasto y ecuación de continuidad

De acuerdo con esta ecuación, la velocidad del fluido es mayor en una región más angosta, y viceversa.



Las líneas de corriente están más próximas unas de las otras en una sección angosta, por lo que la velocidad aumenta en esa sección, y es mayor que en la sección más ancha.

Puesto que la densidad es uniforme, y la entrada y salida es independiente del tiempo, la ecuación representa una ley de conservación de la masa.

7.4 Ejemplos

2. Una persona acostada presenta un aneurisma, una dilatación anormal de un conducto sanguíneo, como la aorta. Debido a esto, el área de la sección transversal de la aorta aumenta a 1.6 veces su tamaño original. Si la rapidez de la sangre a lo largo de la aorta es de $0.4\ m/s$, ¿cuál es el valor de la rapidez de la sangre en la parte que presenta aneurisma?

a) $v = 0.25\ m/s$

7.4 Ejemplos

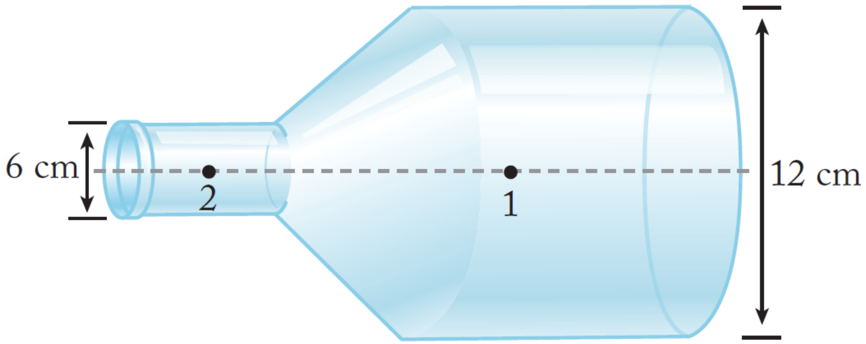
3. A través de un tubo horizontal de $3.81\,cm$ de diámetro fluye agua con una velocidad de $3\,m/s$. En una parte de la tubería hay un estrechamiento y el diámetro es de $2.54\,cm$. ¿Cuál será la velocidad del agua en ese punto?

a) $v = 6.75\,m/s$

7.4 Ejercicios

3. Por una manguera de $2.4\ cm$ de diámetro fluye agua a $2\ m/s$. Calcula el diámetro que debe tener la boquilla para que el agua salga con una velocidad de $8\ m/s$.

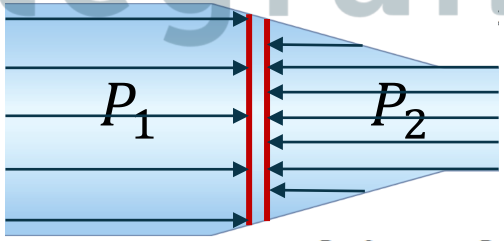
4. Por un tubo horizontal de $6\ cm$ de diámetro fluye agua a $4\ m/s$. Si el tubo se una a otro de $12\ cm$ de diámetro, determina la velocidad del agua en el tubo de mayor diámetro.



7.5 Ecuación de Bernoulli

En un fluido ideal, al no haber fuerzas de fricción, no hay disipación, por lo que la energía se conserva.

Además de las energías cinética y potencial, existe una contribución debida a las presiones que ejercen las moléculas del fluido que se encuentran a los lados de una región; mientras una empuja el fluido, la otra lo frena.

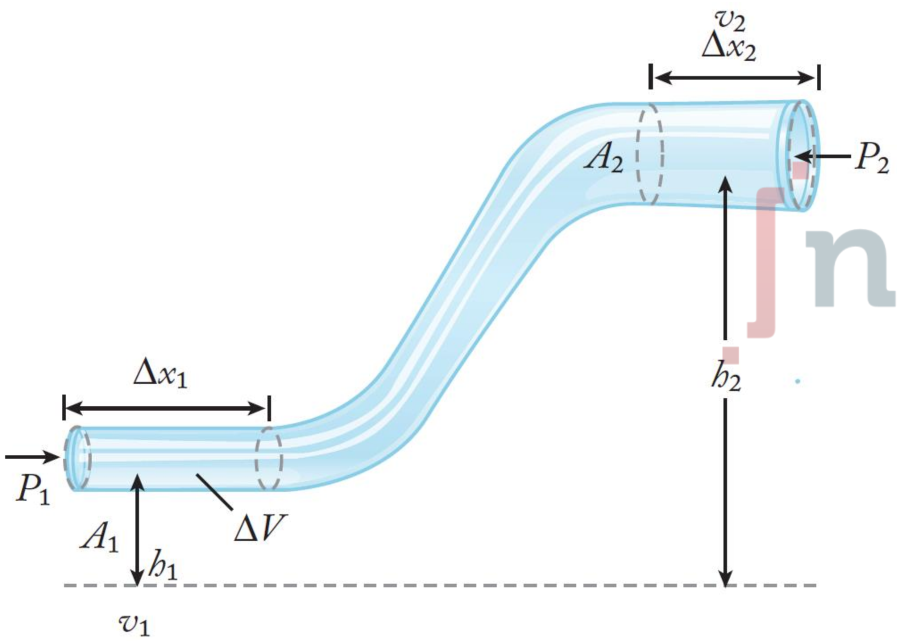


Estas presiones no son necesariamente iguales, pues una tubería puede estrecharse o ampliarse en su sección transversal.

7.5 Ecuación de Bernoulli

El trabajo realizado para desplazar el fluido una distancia Δx por una fuerza F, debida a una presión P en una sección transversal A es

$$W = Fd = PAd = PV$$



Entonces, existe una energía de presión que es capaz de realizar un trabajo. Agregando este término a la conservación de la energía obtenemos

$$P_1V + \frac{1}{2}mv_1{}^2 + mgh_1 = P_2V + \frac{1}{2}mv_2{}^2 + mgh_2$$

En esta ecuación los volúmenes y masas son iguales en ambos puntos, como describe la ecuación de continuidad.

7.5 Ecuación de Bernoulli

Dividiendo la ecuación anterior por el volumen V obtenemos la ecuación de Bernoulli

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 + \rho g h_2$$

Si la tubería no tiene desniveles, las alturas coindicen y resulta

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2$$

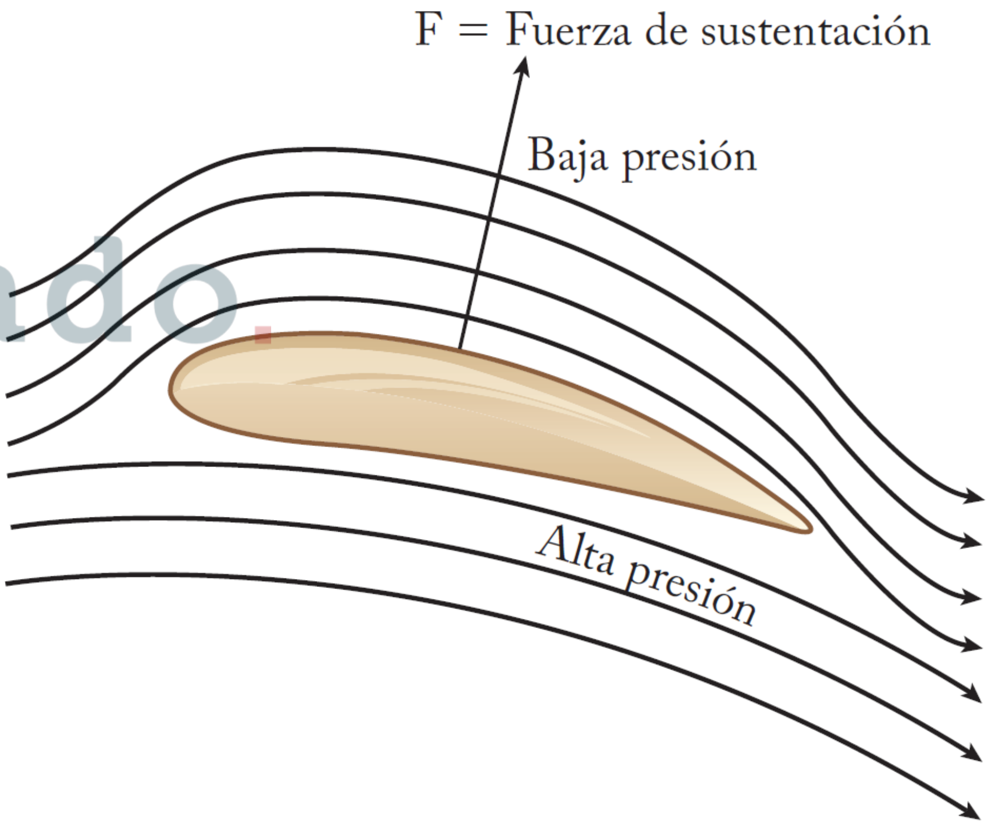
De esta expresión se deduce que: *si la velocidad de un fluido aumenta, la presión debe disminuir, y viceversa*. Esto se conoce como efecto Venturi.

7.5 Ecuación de Bernoulli

El efecto Venturi permite explicar el ascenso de las alas de un avión.

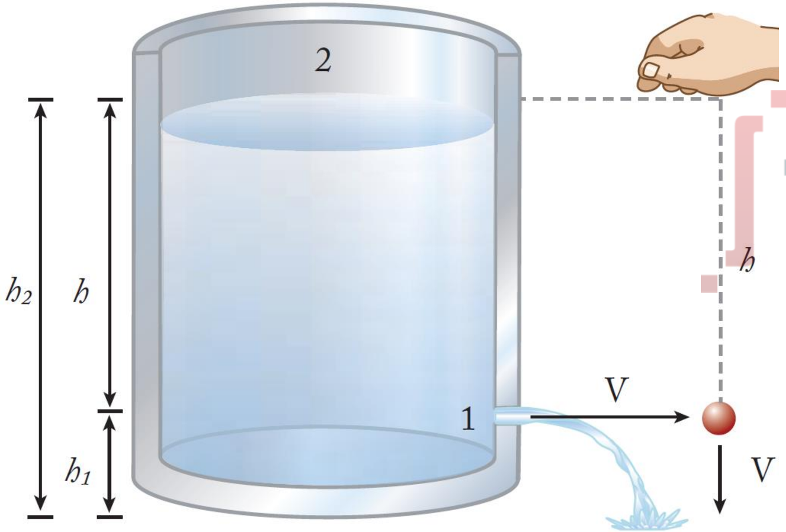
El ala se diseña de modo que el aire se mueva más rápido sobre la parte superior que debajo de ella, con lo cual la presión debida al aire es mayor por debajo.

El desequilibrio de presiones crea una fuerza resultante hacia arriba, llamada sustentación, que empuja las alas y permite el vuelo.



7.5 Ecuación de Bernoulli

Si un recipiente abierto tiene un orificio, el líquido contenido saldrá con una velocidad igual a la que haría un objeto en caída libre con altura igual a la profundidad del orificio. Esto es el principio de Torricelli.



Las presiones en ambos puntos corresponden a la presión atmosférica: $P_1 = P_2 = P_{atm}$

Como el descenso es lento, la velocidad en la parte superior es prácticamente cero: $v_2 = 0$

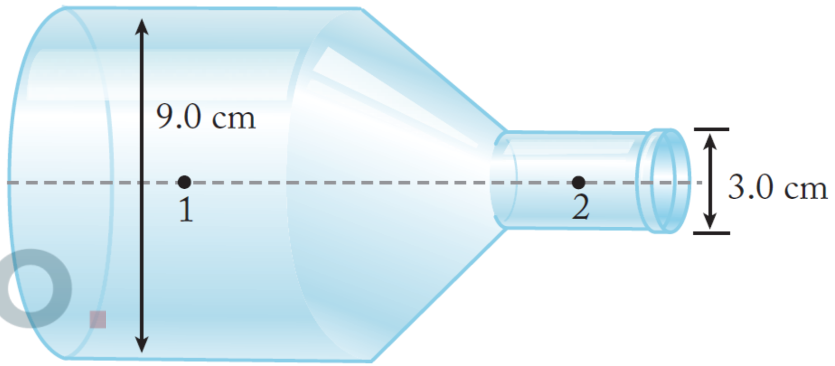
Dividiendo por la densidad, la ecuación de Bernoulli resulta: $\frac{1}{2}{v_1}^2 + gh_1 = gh_2$

Como la distancia entre los extremos es $h = h_2 - h_1$, la velocidad de salida es

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

7.5 Ejemplos

1. El agua fluye a través de una tubería horizontal. Si en la región más estrecha la velocidad del agua es de $10.8\ m/s$ y la presión $200\ kPa$, determina la velocidad y la presión en la región más ancha.



a) $v_1 = 1.2\ m/s$ b) $P_1 = 257.6\ kPa$

2. En un tanque abierto lleno de agua se perfora un orificio con $4\ cm$ de diámetro, a una distancia de $60\ cm$ por debajo de la superficie. Calcular:
   a) La velocidad de salida del agua.
   b) El gasto en litros por minuto.

a) $v = 3.43\ m/s$ b) $G = 258\ l/min$

7.5 Ejercicios

1. El agua fluye a través de un tubo horizontal. Si en la región ancha la velocidad es de $1.8\, m/s$ y la presión de $160\ kPa$, calcula la velocidad y la presión en la región angosta.

2. Determina la velocidad con la que sale un líquido por un orificio localizado a una profundidad de $2.6\, m$ en un tanque.

3. Suponga que el aire fluye hacia atrás por la superficie superior del ala de un avión a $36\, m/s$, y por la parte inferior a $27\, m/s$. Si el ala tiene un área de $3.5\, m^2$, ¿cuál es la fuerza de empuje sobre el ala?