

ntegrando.

C U R S O S A C A D É M I C O S

Capítulo 1

Conceptos preliminares

Temario del capítulo 1

- 1.1 Terminología y notación
- 1.2 Lenguaje algebraico
- 1.3 Términos semejantes
- 1.4 Suma y resta de polinomios
- 1.5 Multiplicación de polinomios
- 1.6 División de polinomios
- 1.7 Radicales en expresiones algebraicas

1.1 Terminología y notación

En **álgebra**, una **letra** se usa para **representar cualquier número**, y se le conoce como **literal**. El número puede pertenecer a un conjunto particular.

$$a, b, c, \dots x, y, z \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Un **número** escrito explícitamente **junto a una o varias letras** se llama **coeficiente** e indica un **producto**; los **elementos que se multiplican** entre sí se llaman **factores**. Por convención, el **coeficiente uno** se omite.

$$3a \quad 3 \text{ es el coeficiente y } a \text{ la literal}$$

$$xy \quad 1 \text{ es el coeficiente y } xy \text{ factores literales}$$

Una **expresión algebraica** es aquella que **consta de términos y factores** que pueden contener cualquier número y operación.

1.1 Terminología y notación

Tanto un coeficiente como una literal pueden llevar un **exponente**, que indica cuántas veces **el factor se multiplica por sí mismo**. Por convención, el **exponente uno no se escribe**.

Un **término** está formado por un **signo** que precede al **coeficiente**, junto con la **parte literal**, de modo que **el número de signos indica el número de términos**. Por convención, el **signo más se omite** si el primer término es positivo.

The diagram shows the algebraic expression $-7a^2b^3 - 5x^2yz^3 + 9xy$ with red arrows pointing to specific parts and labels:

- Signo**: points to the minus sign ($-$) before the first term.
- Exponente**: points to the number 2 in a^2 .
- Coeficiente**: points to the number 5 in $5x^2yz^3$.
- Literal**: points to the x in $9xy$.

1.1 Terminología y notación

Para **nombrar** un término se usa el **prefijo** correspondiente a la **cantidad de términos**: uno-monomio, dos-binomio, tres-trinomio y en general **para más de dos términos** se dice **polinomio**.

El **grado particular** de un **monomio** está dado por el **exponente** de la **literal correspondiente**, mientras que el **grado absoluto** por la **suma de los exponentes** de las literales. Para un **polinomio de una sola literal**, el grado es igual al **exponente más grande**. Por convención, un polinomio debe **ordenarse** en forma **decreciente** en el **exponente** de su literal.

| Expresión | Nombre | Grado particular | Grado absoluto |
|--------------------|----------|--------------------------------------|----------------|
| $3x^2y^5$ | Monomio | 2 respecto a x 5 respecto a y | $2 + 5 = 7$ |
| $-3x^5 - 4x^3 + x$ | Trinomio | --- | 5 |

1.2 Lenguaje algebraico

Las expresiones algebraicas son de utilidad para resolver problemas, por lo que es necesario poder **plasmear de forma matemática un enunciado**. A continuación mostramos algunas palabras usadas para referirse a conceptos matemáticos.

1. **Operaciones:** Suma-adición, resta-diferencia, multiplicación-producto y división-cociente.
2. **Coeficientes:** 2-doble, 3-triple, 4-cuádruple, $1/2$ -mitad, $1/3$ -tercera parte, etc.
3. **Exponentes:** 2-cuadrado, 3-cubo, 4-cuarta potencia o elevado a la cuatro, etc.

Cualquier **literal** se dice que representa **un número cualquiera**.

1.2 Ejemplos

1. Escriba la expresión matemática correspondiente a cada enunciado.

a) Un número cualquiera

b) La diferencia de dos números cualesquiera

c) La quinta parte de un número cualquiera

d) El cubo de un número cualquiera

a) x

b) $x - y$

c) $\frac{x}{5}$

d) x^3

1.2 Ejemplos

2. Escriba la expresión matemática correspondiente a cada enunciado.

a) El cubo de la mitad de un número

b) La suma de los cuadrados de dos números

c) El cuadrado de la suma de dos números

d) El doble de un número aumentado en 3

a) $\left(\frac{x}{2}\right)^3$

b) $a^2 + b^2$

c) $(a + b)^2$

d) $2x + 3$

1.2 Ejercicios

1. Escriba la expresión matemática correspondiente a cada enunciado.
 - a) La raíz cuadrada de la diferencia de dos números
 - b) El cociente de la suma de dos números entre otro
 - c) El producto de la suma de dos números por la diferencia de los mismos
 - d) El doble de la suma de dos números
 - e) La cuarta parte de la cuarta potencia de un número

1.2 Ejercicios

2. Escriba el enunciado correspondiente a cada expresión matemática.

a) $x - 3$

b) $2xy$

c) $\frac{x+y}{2}$

d) $(x^2 + y^2)(x^3 - y^3)$

e) $\sqrt[3]{3(x - y)^2}$

 Integrando.

1.3 Términos semejantes

Los términos algebraicos que **difieren únicamente en sus coeficientes** se llaman **términos semejantes**; contienen las **mismas literales con iguales exponentes**.

$-3x^2y^3, \sqrt{2}x^2y^3$ son semejantes

$\frac{1}{3}abc, \frac{2\pi}{5}abc$ son semejantes

$5, -8.\bar{3}$ son semejantes

En un polinomio donde aparecen términos semejantes es posible **reducirlos a uno solo** mediante **la suma o resta de sus coeficientes**

$$10x^2 - 3x^2 - 5x^2 = 2x^2$$
$$3a + 2b - 6a + 5b = -3a + 7b$$

1.4 Suma y resta de polinomios

Al sumar o restar expresiones algebraicas aumentamos el número de términos del polinomio, por lo que se debe **reducir términos semejantes** en lo posible. En la **suma**, los **sumandos conservan sus signos**, por ejemplo

sumar $a^3b - b^4 + ab^3$ y $6a^3b - 2a^2b^2 + 4ab^3 + 2b^4$

$$\begin{array}{r} a^3b - b^4 + ab^3 \\ + 6a^3b - 2a^2b^2 + 4ab^3 + 2b^4 \\ \hline 7a^3b - 2a^2b^2 + 5ab^3 + b^4 \end{array}$$

1.4 Suma y resta de polinomios

En la **resta**, el **sustraendo cambia de signo** en todos sus términos. Por ejemplo

restar $a^3 - 3a^2 + 4a - 7$ de $2a^3 + a^2 - 3a - 5$

$$\begin{array}{r} 2a^3 + a^2 - 3a - 5 \\ -a^3 + 3a^2 - 4a + 7 \\ \hline a^3 + 4a^2 - 7a + 2 \end{array}$$

Si aparecen **signos de agrupación**, basta con usar las leyes de multiplicación de signos y la propiedad distributiva; un **paréntesis precedido por el signo más puede suprimirse** sin hacer cambios, pero uno **precedido por signo menos** solo se suprime **cambiando todos los signos interiores**.

1.4 Ejemplos

1. Realice las siguientes sumas de polinomios:

a) $3m - 2n + 4$, $6n + 4p - 5$, $8n - 6$ y $m - n - 4p$



b) $3x^2 - 4xy + y^2$, $-5xy + 6x^2 - 3y^2$ y $-6y^2 - 8xy - 9x^2$

a) $4m + 11n - 7$

b) $-17xy - 8y^2$

1.4 Ejemplos

2. Realice las siguientes restas de polinomios:

a) De $5x^2 + 8xy - y^2$ restar $x^2 - 3xy + 4y^2$

 Integrando.

b) Restar $a^x - 5a^{x+1} + 2a^{x-1}$ de $2a^x - 5a^{x+1} - 2a^{x-1}$

a) $4x^2 + 11xy - 5y^2$

b) $a^x - 4a^{x-1}$

1.4 Ejemplos

3. Realice las siguientes operaciones:

a) $m - (2mn - m^2) - [m^2 - (2mn + 3)]$

 **Integrando.**

b) $2x - \{3x - y + 5 + [8x - (x + y - 1)]\}$

a) $m + 3$

b) $-8x + 2y - 6$

1.4 Ejercicios

1. Realice las siguientes sumas y restas:

a) Sumar $35x^2 - 21x - 47y - 44x^2 + 89x - 93$

b) Restar $-4a^3b^3 - \frac{1}{10}ab + \frac{2}{3}a^2b^2 - 9$ de $\frac{3}{5}ab + \frac{1}{6}a^2b^2 - 8$

c) $12 \left(-3x^m + \frac{1}{4}y^m - \frac{2}{3}x^n - y^{m-1} \right) - 15 \left(-\frac{1}{5}x^n + \frac{5}{3}y^{m-1} + x^m + 3y^m \right)$

d) $x^2 - \{ -xy - [-y^2 + (-x^2 + (-x^2 + 3xy)) - x^2] + y^2 \}$

1.5 Multiplicación de polinomios

Para **multiplicar** expresiones algebraicas, los **coeficientes se multiplican** entre ellos en la forma usual, y para las **literales** se usan las mismas **propiedades de los exponentes** vistas para números. Existen tres casos:

1. **Monomio por monomio.** El producto de dos expresiones de un solo término, y cuyo **resultado** también es un **monomio**

$$(3x^2y^3)(-5xy^2) = -15x^3y^5$$

2. **Monomio por polinomio.** El producto de un término por varios términos; se utiliza la **propiedad distributiva** y el **resultado** contiene el mismo **número de términos del polinomio**

$$5a(6a^2 - 2a + 7) = 30a^3 - 10a^2 + 35a$$

1.5 Multiplicación de polinomios

3. **Polinomio por polinomio.** El producto de dos expresiones de varios términos; la **propiedad distributiva** se aplica **tantas veces** como **términos** tenga el **primer** (o **segundo**) **factor** y en general el **número de términos resultante** es igual al **producto** de la **cantidad de términos de cada factor**, salvo que sea posible reducir términos semejantes

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(3a - 2)(6a + 1) = 18a^2 + 3a - 12a - 2 = 18a^2 - 9a - 2$$

Es recomendable **ordenar** los polinomios con **varias literales** en **orden alfabético** y de forma **decreciente** en los **exponentes** para facilitar el producto de polinomios.

1.5 Ejemplos

1. Realice las siguientes multiplicaciones:

a) $(2a^2b)(-3ab^2)$

b) $(3x^4y^2z)^2(-2xy^3z^2)^3$

c) $a^2b(2ax - 3by - 2ab^2)$

d) $(x^2 + xy - 2y^2)(3y^2 - 2xy + x^2)$

a) $-6a^3b^3$

b) $-72x^{11}y^{13}z^8$

c) $2a^3bx - 3a^2b^2y - 2a^3b^3$

d) $x^4 - x^3y - x^2y^2 + 7xy^3 - 6y^4$

1.5 Ejemplos

2. Realice las siguientes multiplicaciones:

a) $(-x^2y) \left(-\frac{2}{3}x^m\right) \left(-\frac{3}{4}a^2y^n\right)$

b) $(a^{n+2}y^{n+1})^2$

c) $(x^{a+1}y - 3x^ay^2 + 2x^{a-1}y^3 - x^{a-2}y^4)(-3x^2y^m)$

d) $(a^2 - 2a)(a^{m+2} - 4a^m - 2a^{m+1})$

a) $-\frac{1}{2}a^2x^{m+2}y^{n+1}$

b) $a^{2n+4}y^{2n+2}$

c) $-3x^{a+3}y^{m+1} + 9x^{a+2}y^{m+2} - 6x^{a+1}y^{m+3} + 3x^ay^{m+4}$

d) $a^{m+4} - 4a^{m+3} + 8a^{m+1}$

1.5 Ejercicios

1. Resuelva las siguientes multiplicaciones.

a) $(-a^{m+1}b^{n-2})(-4a^{m-2}b^{2n+4})$

b) $(-x^2yz^3)^4(5x^{1/3}y^{2/3}z^4)^3$

c) $\left(\frac{2}{3}x^4y^2 - \frac{3}{5}x^2y^4 + \frac{5}{6}y^6\right)\left(-\frac{2}{9}a^2x^3y^2\right)$

d) $(x^{n+1} + 2x^{n+2} - x^{n+3})(x^2 + x)$

e) $(a^2 - 2ab + b^2)(a^4 - 3a^2b^2 + a^3b - ab^3 + b^4)$

1.6 División de polinomios

En la **división** de expresiones algebraicas los **coeficientes se dividen** en la forma usual, y para las **literales** usamos **propiedades de los exponentes** correspondientes. Los tres posibles casos son:

1. **Monomio entre monomio.** El cociente de dos expresiones de un solo término, y cuyo **resultado** también es un **monomio**

$$\frac{-15x^3y^5}{3xy^2} = -5x^2y^3$$

2. **Polinomio entre monomio.** El cociente de varios términos divididos por uno; se utiliza la **propiedad distributiva** y el **resultado** contiene el mismo **número de términos del polinomio**

$$\frac{30a^3 - 10a^2 + 35a}{5a} = 6a^2 - 2a + 7$$

1.6 División de polinomios

3. **Polinomio entre polinomio.** El procedimiento es el siguiente:

- i. Se ordenan el dividendo y el divisor, según las **potencias descendentes de una misma literal**. Si falta alguna potencia debe dejarse un **espacio en blanco**.
- ii. Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor. El resultado, que es parte del **cociente**, se **multiplica por todo el divisor** y entra a la “galera” con **signo opuesto** para reducir términos con el dividendo.
- iii. El **residuo** obtenido se toma como nuevo dividendo y se **repite el proceso** hasta que se tenga un residuo **nulo o de grado inferior al divisor**.

La división puede no ser exacta si su residuo es distinto de cero y puede expresarse como siempre

$$\frac{\textit{Dividendo}}{\textit{Divisor}} = \textit{Cociente} + \frac{\textit{Residuo}}{\textit{Divisor}}$$

1.6 División de polinomios

Por ejemplo: resolver $a^4 - ab^3 - a^3b + b^4 \div ab + b^2 + a^2$

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 + ab + b^2 \overline{) a^4 - a^3b \quad \quad \quad - ab^3 + b^4} \\ \underline{-a^4 - a^3b - a^2b^2} \\ 0 - 2a^3b - a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\ \underline{+ 2a^3b + 2a^2b^2 + 2ab^3} \\ 0 + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\ \underline{- a^2b^2 - ab^3 - b^4} \\ 0 \end{array}$$

$\frac{a^4}{a^2} = a^2$
 $\frac{-2a^3b}{a^2} = -2ab$
 $\frac{a^2b^2}{a^2} = b^2$

Por lo tanto $a^4 - ab^3 - a^3b + b^4 \div ab + b^2 + a^2 = a^2 - 2ab + b^2$

1.6 Ejemplos

1. Realice las siguientes divisiones:

a) $-20mx^2y^3 \div 4xy^3$

b) $(-3x^{2a+3}y^{3a-2}) \div (-5x^{a-4}y^{a-1})$

c) $\frac{2}{3}a^2b^3c \div -\frac{5}{6}a^2bc^2$

d) $(3a^3 - 6a^2b + 9ab^2) \div 3a$

a) $-5mx$

b) $\frac{3}{5}x^{a+7}y^{2a-1}$

c) $-\frac{4b^2}{5c}$

d) $a^2 - 2ab + 3b^2$

1.6 Ejemplos

2. Realice las siguientes divisiones:

a)
$$\frac{2a^x b^m - 6a^{x+1} b^{m-1} - 3a^{x+2} b^{m-2}}{-2a^3 b^4}$$

b)
$$\left(\frac{3}{4}x^3 y - \frac{2}{3}x^2 y^2 + \frac{5}{6}xy^3 - \frac{1}{2}y^4\right) \div \frac{5}{6}xy$$

c)
$$(3x^2 + 2x - 8) \div (x + 2)$$

a)
$$-a^{x-3} b^{m-4} + 3a^{x-2} b^{m-5} + \frac{3}{2}a^{x-1} b^{m-6}$$

b)
$$\frac{9}{10}x^2 - \frac{4}{5}xy + y^2 - \frac{3y^3}{5x}$$

c)
$$3x - 4$$

1.6 Ejemplos

3. Realice las siguientes divisiones:

a) $(x^2 - x - 6) \div (x + 3)$

b) $(3a^5 + 10a^3b^2 + 64a^2b^3 - 21a^4b + 32ab^4) \div (a^3 - 4ab^2 - 5a^2b)$

a) $x - 4 + \frac{6}{x+3}$

b) $3a^2 - 6ab - 8b^2$

1.6 Ejercicios

1. Resuelva las siguientes divisiones:

a) $5a^{2m-1}b^{x-3} \div -6a^{2m-2}b^{x-4}$

b) $-54x^5y^2z^2 \div -6x^2y^2z^4$

c) $\left(\frac{1}{4}m^4 - \frac{2}{3}m^3n + \frac{3}{8}m^2n^2\right) \div \frac{1}{4}m^2$

d)
$$\frac{2a^m - 3a^{m+2} + 6a^{m+4}}{-3a^2}$$

1.6 Ejercicios

2. Resuelva las siguientes divisiones:

a) $(28x^2 - 30y^2 - 11xy) \div (4x - 5y)$

b) $(6m^4 - n^8 - 3m^2n^4 - 4m^3n^2 + 4mn^6) \div (2m^2 - n^4)$

c) $\frac{a^{x+3} + a^x}{a + 1}$

1.7 Radicales en expresiones algebraicas

También es posible usar las **propiedades de los radicales** de números para **simplificar expresiones algebraicas**.

1. **Sacar factores del radical.** El radicando puede expresarse como un producto de factores, donde uno tenga como exponente el índice de la raíz

$$\sqrt[3]{8x^6y^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 \cdot y^2} = 2x^2y\sqrt[3]{y^2}$$

2. **Reducir el índice de la raíz.** Expresando el radical como exponente fraccionario

$$\sqrt[6]{x^2} = x^{2/6} = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

3. **Suma y resta de radicales.** Cuando se tienen **dos o más radicales semejantes**

$$2\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 3\sqrt{x} = (2 + 5 - 3)\sqrt{x} = 4\sqrt{x}$$

1.7 Radicales en expresiones algebraicas

4. **Multiplicación o división de radicales con diferente índice.** Encontrar el mínimo común múltiplo de los índices y después los **exponentes con fracciones equivalentes**

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{3}{6}} \cdot y^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{x^3 y^2}$$

5. **Introducir factores al radical.** Expresando el factor con exponente y raíz iguales

$$\sqrt[3]{y} \cdot \sqrt{z} = \sqrt[3]{\sqrt{y^2} \cdot \sqrt{z}} = \sqrt[3]{\sqrt{y^2 z}} = \sqrt[6]{y^2 z}$$

6. **Racionalización.** Para eliminar radicales del denominador

$$\frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})} = \frac{1 - \sqrt{x}}{1^2 - (\sqrt{x})^2} = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$$

1.7 Ejemplos

1. Simplifique las siguientes raíces.

a) $(3\sqrt{x^2y^3})(-5\sqrt{x^4y^5})$

b) $\frac{\sqrt{49x^7y^6}}{\sqrt{25x^3}}$

c) $\sqrt{48xy^6z^3}$

d) $\sqrt[6]{x^2}$

 **Integrando.**

a) $-15x^3y^4$

b) $\frac{7}{5}x^2y^3$

c) $4y^3z\sqrt{3xz}$

d) $\sqrt[3]{x}$

1.7 Ejemplos

2. Simplifique los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{z^2}}$

b) $4\sqrt{12x^4y} - 5\sqrt{3x^2y} + \sqrt{75x^6y^3}$

c) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2b}$

a) $\sqrt[6]{z}$

b) $(5x^3y + 8x^2 - 5x)\sqrt{3y}$

c) $a^{12}\sqrt{a^5b^4}$

1.7 Ejemplos

3. Simplifique lo siguiente.

a) $\sqrt{x^3 \sqrt[3]{y}}$

b) $\frac{5}{\sqrt{9y}}$

c) $\frac{y-2}{\sqrt{y}-\sqrt{2}}$

 Integrando.

a) $x^6 \sqrt{x^3 y}$

b) $\frac{5\sqrt{y}}{3y}$

c) $\sqrt{y} + \sqrt{2}$

d) $\sqrt[6]{z}$

1.7 Ejercicios

1. Resuelva y simplifique lo siguiente.

a) $\frac{\sqrt{a}}{5} \left(\sqrt{b} - \frac{4}{3} \sqrt{a} \right)$

b) $\frac{5}{\sqrt[3]{x^{10}}}$

c) $\frac{2}{3} \sqrt[3]{27x^4y}$

d) $3^4 \sqrt{25x^2y^2}$

 Integrando.

1.7 Ejercicios

2. Resuelva y simplifique lo siguiente (racionalice denominadores).

a) $3\sqrt{x^4y} + x\sqrt{4x^2y} - x^2\sqrt{9y}$

b) $2xy \sqrt[4]{\frac{81a^2}{4x^3y}}$

c) $\sqrt[4]{25x^2y^3} \cdot \sqrt[6]{125x^2}$

d) $\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$

 Integrando.