

ntegrando.

C U R S O S A C A D É M I C O S

Capítulo 4

Fracciones

Temario del capítulo 4

4.1 Máximo común divisor

4.2 Mínimo común múltiplo

4.3 Simplificación de fracciones

4.4 Suma y resta

4.5 Multiplicación y división

4.6 Fracciones complejas

 Integrando.

4.1 Máximo común divisor

Es posible determinar **monomios** o **polinomios** que **dividan de forma exacta** a otras expresiones algebraicas. Esto es el **máximo común divisor (MCD)**.

1. **Monomios:** Es el **factor común** de los términos, como definimos en el caso de factorizaciones. Buscamos el MCD de los coeficientes, seguido de las literales que aparecen en todos, tomando el **exponente menor**.

$$8x^2y^3z; 4x^3y^2z^2; 36xyz^3$$

$$\text{MCD} = 4xyz$$

4.1 Máximo común divisor

2. **Monomios y polinomios:** Los polinomios deben **factorizarse** a su mínima expresión. Después buscamos el **factor común monomio** entre ellos

$$6xy; 2y^2 + 2xy$$

$$6xy; 2y(y + x)$$

$$\text{MCD} = 2y$$

3. **Polinomios:** Factorizamos los polinomios a su mínima expresión y buscamos el factor común, ya sea **monomio o polinomio**.

$$a^3 - 9a^2 + 20a; \quad a^2 - a - 12; \quad a^2 - 2a - 8$$

$$a(a - 5)(a - 4); \quad (a - 4)(a + 3); \quad (a - 4)(a + 2)$$

$$\text{MCD} = a - 4$$

4.1 Ejemplos

1. Encuentre el máximo común divisor.

a) $x^4y^3; x^3y^2$

b) $18mxy^2; 54m^2x^2y^2; 36my^2$

c) $ab^2; 5a^3b^2 - 25a^2b$

d) $6xy^3; 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3$

a) x^3y^2

b) $18my^2$

c) ab

d) $3xy^3$

4.1 Ejemplos

2. Encuentre el máximo común divisor.

a) $9a^3b^2 + 18a^2b$; $6a^3b - 6a^2b$

b) $w^4(x^2 - y^2)$; $w^3(x - y)^2$

c) $3y^2 - 3y - 6$; $6y^2 - 18y - 24$

a) $3a^2b$

b) $w^3(x - y)$

c) $3(y + 1)$

4.1 Ejercicios

1. Determine el máximo común divisor de los monomios y polinomios.

a) $15a^2b^3c$; $24ab^2x$; $36b^4x^2$

b) $75a^4b^3c^2$; $150a^5b^7x^2$; $225a^3b^6y^2$

c) $12a^2b^3$; $4a^3b^2 - 8a^2b^3$

d) $x^4 - 9x^2$; $x^4 - 5x^3 + 6x^2$; $x^4 - 6x^3 + 9x^2$

e) $x^3 + 27$; $2x^2 - 6x + 18$; $x^4 - 3x^3 + 9x^2$

4.2 Mínimo común múltiplo

El **producto de los factores** (más simplificados o factorizados) **comunes y no comunes**, elevados, respectivamente, **a la mayor potencia** con la que aparecen, es el **mínimo común múltiplo (mcm)** para expresiones algebraicas.

1. **Monomios:** Buscamos el mcm de los coeficientes, seguido de **todas las literales que aparezcan**, aunque no estén presentes en todos los términos; de los que aparezcan repetidos, se toma el de **exponente mayor**.

$$8a^2x; 6bx^3; 12c^3$$

$$\text{mcm} = 24a^2bc^3x^3$$

4.2 Mínimo común múltiplo

2. **Monomios y polinomios:** Los polinomios deben **factorizarse** a su mínima expresión. Buscamos el mcm de los coeficientes de los monomios y después los **factores comunes y no comunes**

$$3y^2; 4xy - 8y^2$$
$$3y^2; 4y(x - 2y)$$

$$\text{mcm} = 12y^2(x - 2y)$$

3. **Polinomios:** Factorizamos. Los factores que solo **aparecen una vez van multiplicados por los que se repiten**, éstos con el exponente más grande que tengan

$$x^2 - y^2; \quad x^2 + 2xy + y^2; \quad x^3 + y^3$$
$$(x + y)(x - y); \quad (x + y)^2; \quad (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$\text{mcm} = (x + y)^2(x - y)(x^2 - xy + y^2)$$

4.2 Ejemplos

1. Encuentre el mínimo común múltiplo.

a) $8ab^2c$; $12a^3b^2$

b) $10a^3x$; $36a^2mx^2$; $24b^2m^4$

c) $15x^2$; $10x^2 + 5x$; $45x^3$

d) $8a^2b$; $4a^3 - 4a$; $6a^2 - 12a + 6$

a) $24a^3b^2c$

b) $360a^3b^2m^4x^2$

c) $45x^3(2x + 1)$

d) $24a^2b(a + 1)(a - 1)^2$

4.2 Ejemplos

2. Encuentre el mínimo común múltiplo.

a) $x^3 + 2bx^2$; $x^3y - 4b^2xy$; $x^2y^2 + 4bxy^2 + 4b^2y^2$

b) $(x + 1)^3$; $x^3 + 1$; $x^2 - 2x - 3$

c) $15x^3 + 20x^2 + 5x$; $3x^3 - 3x + x^2 - 1$; $27x^4 + 18x^3 + 3x^2$

a) $x^2y^2(x + 2b)^2(x - 2b)$

b) $(x + 1)^3(x - 3)(x^2 - x + 1)$

c) $15x^2(3x + 1)^2(x + 1)(x - 1)$

4.2 Ejercicios

1. Determine el mínimo común múltiplo de los monomios y polinomios.

a) $2x^2y$; $8xy^3$; $4a^2x^3$; $12a^3$

b) $2a^2b^2$; $3ax + 3a$; $6x - 18$

c) $6ab$; $x^2 - 4xy + 4y^2$; $9a^2x - 18a^2y$

d) $x^2 + x - 2$; $x^2 - 4x + 3$; $x^2 - x - 6$

e) $x^3 - 9x + x^2 - 9$; $x^4 - 18x^2 + 81$; $x^2 + 4x + 3$

4.3 Simplificación de fracciones

Una **fracción algebraica** es una expresión cuyos **numerador** y **denominador** son **monomios** o **polinomios**.

Al igual que las fracciones numéricas, es posible **simplificarse**, si se encuentran **factores idénticos** tanto en el numerador como en el denominador.

Para simplificar, se debe **factorizar por completo**, por ejemplo

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{2ax - 6a} = \frac{(x - 3)(x - 2)}{2a(x - 3)} = \frac{x - 2}{2a}$$

4.3 Ejemplos

1. Simplifica las siguientes fracciones.

a)
$$\frac{2x^3 - 2x}{4x^4 - 8x^3 - 12x^2}$$

b)
$$\frac{a^3 - 25a}{2a^3 + 8a^2 - 10a}$$

c)
$$\frac{3x^3 - 12x - x^2y + 4y}{x^4 - 5x^3 - 14x^2}$$

 Integrando.

a)
$$\frac{x-1}{2x(x-3)}$$

b)
$$\frac{a-5}{2(a-1)}$$

c)
$$\frac{(x-2)(3x-y)}{x^2(x-7)}$$

4.3 Ejercicios

1. Simplifica las fracciones algebraicas.

a) $\frac{(m-n)^2}{m^2-n^2}$

b) $\frac{a^2-a-20}{a^2-7a+10}$

c) $\frac{8n^3-125}{25-20n+4n^2}$

d) $\frac{a^2-(b-c)^2}{(a+b)^2-c^2}$

 Integrando.

4.4 Suma y resta

Para **sumar y restar** fracciones algebraicas, primero determinamos el **mcm** de sus **denominadores**, después se convierten en **fracciones equivalentes** y finalmente se **agrupan términos semejantes**. Si es posible, **simplificar**.

Por ejemplo, sumar:

$$\frac{1}{3x+3} + \frac{2x}{2x-2} - \frac{3x^2-1}{x^2-1}$$

1. Encontrar el **mcm** de los denominadores

$$3x + 3 = 3(x + 1); \quad 2x - 2 = 2(x - 1); \quad x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$$\text{mcm} = 6(x + 1)(x - 1)$$

4.4 Suma y resta

2. **Dividir** el mcm por los denominadores y **multiplicar** por los numeradores

$$\frac{6(x+1)(x-1)}{3(x+1)} \cdot (1) + \frac{6(x+1)(x-1)}{2(x-1)} \cdot (2x) - \frac{6(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \cdot (3x^2 - 1)$$
$$2(x-1) + 6x(x+1) - 6(3x^2 - 1)$$

3. Reducir **términos semejantes** y **factorizar**

$$2x - 2 + 6x^2 + 6x - 18x^2 + 6 = -12x^2 + 8x + 4 = -4(3x^2 - 2x - 1)$$
$$-4(3x + 1)(x - 1)$$

4. **Dividir** el resultado por el mcm y **simplificar**

$$\frac{-4(3x+1)(x-1)}{6(x+1)(x-1)} = -\frac{2(3x+1)}{3(x+1)}$$

4.4 Ejemplos

1. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones.

a) $x - 2 + \frac{3}{x-1}$

b) $\frac{a}{ab-b^2} - \frac{1}{b}$

c) $\frac{a-1}{a^2-4} + \frac{a-2}{a^2-a-6} + \frac{a+6}{a^2-5a+6}$

a) $\frac{x^2-3x+5}{x-1}$

b) $\frac{1}{a-b}$

c) $\frac{3a^2+19}{(a^2-4)(a-3)}$

4.4 Ejercicios

1. Resuelve las sumas y restas de fracciones algebraicas.

a) $\frac{m+3}{m-3} + \frac{m+2}{m-2}$

b) $\frac{x+1}{10} + \frac{x-3}{5x-10} + \frac{x-2}{2}$

c) $\frac{1}{x-2} + \frac{1-x^2}{x^3-8} + \frac{x}{x^2+2x+4}$

d) $\frac{x-2}{x^2-x} - \frac{x+3}{x^2+3x-4} + \frac{x^2+12x+16}{x^4+3x^3-4x^2}$



4.5 Multiplicación y división

Al igual que una fracción ordinaria, la **multiplicación** es **directa** y la **división cruzada**. Es conveniente **factorizar** antes de operar para simplificar.

Para la **multiplicación** siguiente:

$$\frac{a^2 - 1}{a^2 + 2a} \cdot \frac{a^2 - a - 6}{3a^2 + 7a + 4} \cdot \frac{3a + 4}{a^2 - 4a + 3}$$

1. Factorizar

$$\frac{(a - 1)(a + 1)}{a(a + 2)} \cdot \frac{(a - 3)(a + 2)}{(3a + 4)(a + 1)} \cdot \frac{3a + 4}{(a - 3)(a - 1)}$$

2. Multiplicar en forma **directa** y simplificar

$$\frac{(a - 1)(a + 1)(a - 3)(a + 2)(3a + 4)}{a(a + 2)(3a + 4)(a + 1)(a - 3)(a - 1)} = \frac{1}{a}$$

4.5 Multiplicación y división

Para la siguiente **división**:

$$\frac{x^3 - x}{2x^2 + 2x} \div \frac{5x^2 - 5x}{2x + 6}$$

1. Factorizar

$$\frac{x(x^2 - 1)}{2x(x + 1)} \div \frac{5x(x - 1)}{2(x + 3)}$$

2. Multiplicar en forma **cruzada** y simplificar

$$\frac{x(x + 1)(x - 1) \cdot 2(x + 3)}{2x(x + 1) \cdot 5x(x - 1)} = \frac{x + 3}{5x}$$

4.5 Ejemplos

1. Realiza las siguientes multiplicaciones de fracciones.

a) $\frac{2a}{3b^3} \cdot \frac{3b^2}{4x} \cdot \frac{x^2}{2a^2}$

b) $\frac{x^2-x}{x-1} \cdot \frac{x+y}{x}$

c) $\frac{3x-3}{2x+4} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x^2-x}$

 Integrando.

a) $\frac{x}{4ab}$

b) $x + y$

c) $\frac{3x+6}{2x}$

4.5 Ejemplos

2. Realiza las siguientes divisiones de fracciones.

a) $\frac{4a^2}{3b^2} \div \frac{2ax}{9b^3}$

b) $(x^2 - 3x + 2) \div \frac{x^2 - 1}{x}$

c) $\frac{1}{x^2 - x - 30} \div \frac{3}{x^2 + x - 42}$

a) $\frac{6ab}{x}$

b) $\frac{x^2 - 2x}{x + 1}$

c) $\frac{x + 7}{3x + 15}$

4.5 Ejercicios

1. Resuelve los productos y cocientes de fracciones algebraicas.

a)
$$\frac{x^2+2x}{x^2-16} \cdot \frac{x^2-2x-8}{x^3+x^2} \cdot \frac{x^2+4x}{x^2+4x+4}$$

b)
$$\frac{a^2-5a+6}{3a-15} \cdot \frac{6a}{a^2-a-30} \cdot \frac{a^2-25}{2a-4}$$

c)
$$\frac{a^4-1}{a^3+a^2} \div \frac{a^4+4a^2+3}{3a^3+9a}$$

d)
$$\frac{x^3+125}{x^2-64} \div \frac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56}$$

4.6 Fracciones complejas

Cuando hay una **fracción dentro de otra**, incluyendo operaciones, se debe resolver **numerador y denominador por separado** y después realizar la **división**.

Por ejemplo, simplificar:

$$\frac{x - 1 - \frac{12}{x - 2}}{x + 6 + \frac{16}{x - 2}}$$

Integrando.

1. **Reducir** numerador y denominador

$$x - 1 - \frac{12}{x - 2} = \frac{(x - 1)(x - 2) - 12}{x - 2} = \frac{(x^2 - 3x + 2) - 12}{x - 2} = \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 2}$$

$$x + 6 + \frac{16}{x - 2} = \frac{(x + 6)(x - 2) + 16}{x - 2} = \frac{(x^2 + 4x - 12) + 16}{x - 2} = \frac{x^2 + 4x + 4}{x - 2}$$

4.6 Fracciones complejas

2. Usar la regla de la **división** de fracciones

$$\frac{\frac{x^2 - 3x - 10}{x - 2}}{\frac{x^2 + 4x + 4}{x - 2}} = \frac{(x^2 - 3x - 10) \cdot (x - 2)}{(x^2 + 4x + 4) \cdot (x - 2)} = \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 4x + 4}$$

3. **Simplificar**

$$\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x - 5)(x + 2)}{(x + 2)^2} = \frac{x - 5}{x + 2}$$

4.6 Ejemplos

1. Resuelve lo siguiente:

a) $\frac{x}{2 - \frac{3}{x}}$

b) $\frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1}}$

 Integrando.

a) $\frac{x^2}{2x-3}$

b) $\frac{2}{x^2+1}$

4.6 Ejercicios

1. Resuelve las fracciones.

a)
$$\frac{2 + \frac{3a}{5b}}{a + \frac{10b}{3}}$$

b)
$$\frac{\frac{20x^2 + 7x - 6}{x}}{\frac{4}{x^2} - 25}$$

c)
$$\frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{\frac{x+y}{x} + \frac{x+y}{y}}$$

 Integrando.