∫ntegrando.

CURSOS ACADÉMICOS

Integrando.
CURSOS ACADÉMICOS

Capítulo 5

Ecuaciones

Temario del capítulo 5

5.1 Propiedades de la igualdad

La igualdad es la expresión de que dos cantidades tienen el mismo valor. Puede ser de dos tipos:

i. Identidad. Cuando la igualdad se cumple para cualquier valor que se le asigne a las variables

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

ii. Ecuación. La igualdad solo es verdadera para determinados valores de las incógnitas

$$x + 8 = 10 \Rightarrow x = 2$$

5.1 Propiedades de la igualdad

La igualdad satisface:

1. Propiedad reflexiva. Toda cantidad es idéntica a sí misma

$$a = a;\ a + b = a + b;\ \frac{3}{x} = \frac{3}{x}$$

2. Propiedad simétrica. Los miembros de una igualdad pueden permutar sus lugares sin alterarla

$$x + 4 = 9 \text{ o } 9 = x + 4$$

3. Propiedad transitiva. Si dos cantidades son iguales a una tercera cantidad, son iguales entre sí

$$\text{Si } a = b \text{ y } b = p \Rightarrow a = p$$

$$x + 5 = 12 \text{ y } 12 = m + n \Rightarrow x + 5 = m + n$$

5.1 Propiedades de la igualdad

∫ntegrando.
CURSOS ACADÉMICOS

4. En cualquier igualdad se pueden efectuar las **mismas operaciones en ambos lados** sin alterarla

$$a = b$$
$$a + c = b + c$$

$$x = y$$
$$3 \cdot x = 3 \cdot y$$

$$\sqrt{x+5} = 3$$
$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2 = 3^2$$

5. Dos igualdades pueden **sumarse o restarse, miembro a miembro**, y el resultado es una **nueva igualdad**

$$x + 3y = 5$$
$$-x + 5y = 8$$

$$x + (-x) + 3y + (5y) = 5 + (8)$$
$$8y = 13$$

5.1 Propiedades de la igualdad

Con las propiedades de los números reales y de la igualdad, se pueden establecer los pasos para despejar, es decir, encontrar el valor de la incógnita en una ecuación:

$$2x^3 + 4y^2 = 8$$

i. El término que contiene a la variable que se desea despejar debe permanecer solo (pasar sumando/restando los demás términos)

$$2x^3 = 8 - 4y^2$$

ii. Los coeficientes de la literal deben quitarse (pasar multiplicando/dividiendo)

$$x^3 = \frac{8 - 4y^2}{2}$$

iii. Los exponentes o raíces se despejan (sacar raíz/elevar a una potencia el otro lado)

$$x = \sqrt[3]{4 - 2y^2}$$

5.1 Ejemplos

1. Despeja las siguientes ecuaciones.

   a) Despejar b de la ecuación $P = 2b + 2h$

   b) Despejar v de la ecuación $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = E$

a) $b = \frac{P-2h}{2}$

b) $v = \sqrt{\frac{2(E-mgh)}{m}}$

5.1 Ejemplos

∫ntegrando.
CURSOS ACADÉMICOS

2. Despeja las siguientes ecuaciones.

   a) Despejar x de la ecuación $y = \frac{3x-4}{4x+3}$

   b) Despejar E de la ecuación $c = \sqrt{\frac{E}{m}}$

a) $x = \frac{3y+4}{3-4y}$

b) $E = mc^2$

5.1 Ejercicios

1. Despejar x de la ecuación $\frac{x}{a} - 1 = bx + 4$

2. Despejar ρ de la ecuación $P_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2$

3. Despejar T_1 de la ecuación $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$

4. Despejar y de la ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

5. Despejar x de la ecuación $y = \frac{x+3}{2-4x}$

5.2 Ecuaciones de primer grado

Una ecuación con una incógnita, cuyo exponente es uno, es una ecuación lineal o de primer grado. Su solución es única.

Podemos encontrar ecuaciones que involucren diferentes procedimientos. Es necesario simplificar antes de resolver:

i. Efectuar operaciones (quitar signos de agrupación, fracciones, exponentes o radicales).
ii. Reunir en un lado los términos con la incógnita y en el otro las cantidades conocidas.
iii. Reducir términos semejantes.
iv. Despejar la incógnita.

5.2 Ejemplos

1. Resuelva las ecuaciones lineales.

a) $-3x - 5 = x - 21$

b) $(5 - 3y) - (-4y + 6) = (8y + 11) - (3y - 6)$

c) $\frac{2a-15}{3} = \frac{18-a}{9}$

a) $x = 4$ b) $y = -\frac{9}{2}$ c) $a = 9$

5.2 Ejemplos

2. Resuelva para x en las siguientes ecuaciones.

a) $2(x-a)-6=4(ax-4)$

b) $\frac{2x-1}{3}-\frac{x+13}{24}=3x+\frac{5(x+1)}{8}$

a) $x=\frac{a-5}{1-2a}$

b) $x=-\frac{1}{2}$

5.2 Ejemplos

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

3. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} = 0$

b) $m - 2m^2 = m(2 - 2m) - 4$

c) $\sqrt{x - 6} = 3$

a) $x = \frac{3}{2}$ b) $m = 4$ c) $x = 15$

5.2 Ejemplos

4. Resuelva los siguientes problemas:

   a) La suma de tres números consecutivos es 360. Encuentre dichos números.

   b) Roberto tiene el doble de la edad de su hermano. Si la suma de sus edades es 15, ¿cuántos años tiene cada uno?

   c) Gera, Jos y Alex ganan entre los tres \$120. Jos ganó \$20 menos que Gera y Alex ganó el doble que Jos. Halla lo que ganó cada uno.

a) $119, 120, 121$

b) $5, 10$

c) $Gera: \$45, Jos: \$25, Alex: \$50$

5.2 Ejercicios

1. Resuelva para x en las siguientes ecuaciones de primer grado.

   a) $11x + 5x - 1 = 65x - 36$

   b) $m(n - x) - m(n - 1) = m(mx - a)$

   c) $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+3}{x-3}$

   d) $\frac{2}{x} + \frac{6}{2x} = 5$

5.2 Ejercicios

2. Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $\frac{7}{x^2-4}+\frac{2}{x^2-3x+2}=\frac{4}{x^2+x-2}$

b) $\frac{2x-9}{10}+\frac{2x-3}{2x-1}=\frac{x}{5}$

c) $(x-2)^2-(3-x)^2=1$

d) $\sqrt{x^2-5x+6}=x-3$

5.2 Ejercicios

3. Resuelva los siguientes problemas.

   a) La edad de una persona es 41 años y la de su hijo es 9. Hallar al cabo de cuántos años la edad del padre triplica la del hijo.

   b) Hallar dos números si uno es el doble del otro, disminuido en cinco unidades, y la suma de ambos es trece.

   c) El número de mujeres en el salón de clases es 6 más que el doble de varones. Si hay 42 mujeres, ¿cuántos varones hay?

   d) El cuádruple del recíproco un número menos el doble del recíproco del mismo es igual a uno. Encontrar el número.

5.3 Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones está formado por dos o más ecuaciones. Si el exponente de las incógnitas es uno, entonces es un sistema lineal.

Teniendo tantas ecuaciones (independientes) como incógnitas, la solución es única.

Si una ecuación se obtiene multiplicando la otra por un número (dependiente), no es posible definir soluciones únicas.

Si las ecuaciones coinciden en los coeficientes de las literales, pero difieren en la parte independiente, no existen soluciones.

5.3 Sistemas de ecuaciones lineales

Los métodos usuales para resolver sistemas 2×2 son:

1. **Reducción/Suma y resta.** Multiplicar cada ecuación **por un número** tal que ambas resulten con una **incógnita con el mismo coeficiente** y **signos opuestos**. Al sumarlas, desaparece la incógnita y se resuelve la otra.

2. **Sustitución.** Se **despeja** cualquiera de las incógnitas en una de las ecuaciones y se **sustituye** su expresión en la otra.

3. **Igualación.** Se **despeja la misma incógnita** en ambas ecuaciones y el resultado se **iguala** para encontrar su valor.

5.3 Ejemplos

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones por el método de suma y resta.

a)
$$\begin{aligned} 5x + 7y &= -1 \\ -3x + 4y &= -24 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 7x + 4y &= 13 \\ 5x - 2y &= 19 \end{aligned}$$

a) $x = 4, y = -3$

b) $x = 3, y = -2$

5.3 Ejemplos

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones por el método de sustitución.

a) $$\begin{aligned} 4x + 5y &= 6 \\ y &= 2x - 10 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} y - x &= -4 \\ 4x - y &= 22 \end{aligned}$$

a) $x = 4, y = -2$

b) $x = 6, y = 2$

5.3 Ejemplos

3. Resuelve los sistemas de ecuaciones por el método de igualación.

a)
$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ -x + y &= 10 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 7y - 15x &= 1 \\ 8 + 6x + y &= 0 \end{aligned}$$

a) $x = -6, y = 4$

b) $x = -1, y = -2$

5.3 Ejemplos

4. Resuelve los siguientes problemas.

a) En un corral hay gallinas y cerdos. Si en total hay 25 cabezas y 80 patas, ¿cuántas gallinas y cerdos hay?

b) Un número de dos cifras equivale a 6 veces la suma de sus cifras, y si al número se le resta 9, las cifras se invierten. Hallar el número.

a) $10\ gallinas, 15\ cerdos$ b) 54

5.3 Ejercicios

1. Resuelve cada sistema de ecuaciones por el método indicado.

   a) Sustitución: $\begin{aligned} 3x - 4y &= 1 \\ 2x - \ \ y &= 4 \end{aligned}$

   b) Suma y resta: $\begin{aligned} x - 2y &= 10 \\ 2x + 3y &= -8 \end{aligned}$

   c) Igualación: $\begin{aligned} 3x + 2y &= 2 \\ -2x + y &= 8 \end{aligned}$

5.3 Ejercicios

2. Resuelve los siguientes problemas.

a) Hallar dos números cuya suma sea 28 y su diferencia 12.

b) Si el numerador de una fracción dada se aumenta en 1, la nueva fracción es 1/2; si el denominador se disminuye en 1, la nueva fracción es 1/3. Determinar la fracción.

c) Este año, Javier es tres veces mayor que su hijo. Hace 10 años, la edad de Javier era 7 veces la de su hijo. ¿Qué edad tienen actualmente?

5.3 Sistemas de ecuaciones lineales

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

A continuación mostramos cómo resolver un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 11 \qquad (1)\\
x - y + 3z &= 13 \qquad (2)\\
2x + 2y - z &= 7 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

i. Escoger una incógnita sencilla de cancelar al sumar ecuaciones

$$(1) + (3) \rightarrow \quad 3x + 3y = 18$$

$$-3 \cdot (1) + (2) \rightarrow -2x - 4y = -20$$

5.3 Sistemas de ecuaciones lineales

ii. Resolver el sistema 2×2

$$3x + 3y = 18 \rightarrow 3x = 18 - 3y \rightarrow x = 6 - y$$

$$-2x - 4y = -20 \rightarrow -2x = -20 + 4y \rightarrow x = 10 - 2y$$

$$6 - y = 10 - 2y \rightarrow y = 4$$

$$x = 6 - y \rightarrow x = 2$$

iii. Sustituir en alguna de las ecuaciones originales

$$x + y + z = 11 \rightarrow 2 + 4 + z = 11 \rightarrow z = 5$$

La solución del sistema es $x = 2,\ y = 4,\ z = 5$

5.3 Ejemplos

5. Resuelve los sistemas de 3×3.

a)
$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 12 \\ 5x - 4y + 7z &= 27 \\ 10x + 3y - z &= 40 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 13 \\ 4y + z &= -8 \\ x - y - z &= -2 \end{aligned}$$

a) $x = 5, y = -4, z = -2$

b) $x = -1, y = -3, z = 4$

5.3 Ejemplos

6. Resuelve el siguiente problema.

   a) Ana es dueña de una tienda de mascotas en donde hay 22 animales, entre perros, gatos y patos. Ha contado que el doble de gatos más el triple de patos es igual al doble de perros. Además, el número de perros es el doble que el de gatos. ¿Cuántos perros, gatos y patos hay?

a) $12\ perros, 6\ gatos\ y\ 4\ patos$

5.3 Ejercicios

3. Resuelve los siguientes sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

a) $$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 2x - 3y + 5z &= -5 \\ 3x + 4y + 7z &= 10 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x - \frac{y+z}{3} &= 4 \\ y - \frac{x+z}{8} &= 10 \\ z - \frac{y-x}{2} &= 5 \end{aligned}$$

5.3 Ejercicios

4. Resuelve los siguientes problemas.

   a) Por un libro, un cuaderno y una carpeta se pagan $56. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del libro y que el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del libro. Calcula los precios de cada uno.

   b) Hallar tres números sabiendo que: el primero es igual al segundo más la mitad del tercero, que la suma del segundo y el tercero es igual al primero aumentado en uno, y que si se resta el segundo de la suma del primero con el tercero el resultado es cinco.

5.4 Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación con una incógnita y cuyo exponente mayor es dos, es una ecuación cuadrática o de segundo grado. Tienen dos soluciones, también llamadas ceros o raíces. Pueden ser resueltas por factorización o por fórmula general.

La forma general tiene tres términos cuando es igualada a cero

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se pueden clasificar por el número de términos, siendo completa cuando tiene los tres e incompleta (pura o mixta) cuando tiene dos.

Según el tipo de ecuación, las soluciones presentan características particulares.

5.4 Ecuaciones de segundo grado

1. Incompletas

   a) Puras. Aquellas que no tienen término lineal: $b = 0$. Sus soluciones tienen igual valor absoluto pero signo distinto. Es una diferencia de cuadrados

$$4x^2 - 25 = 0 \rightarrow (2x+5)(2x-5) = 0$$

$$2x + 5 = 0 \rightarrow x_1 = -5/2$$
$$2x - 5 = 0 \rightarrow x_2 = 5/2$$

   b) Mixtas. No contienen el término independiente: $c = 0$. Una de las soluciones siempre es cero. Resulta tener factor común

$$3x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(3x-4)$$

$$x = 0 \rightarrow x_1 = 0$$
$$3x - 4 = 0 \rightarrow x_2 = 4/3$$

5.4 Ecuaciones de segundo grado

2. Completas

a) Un caso se da con soluciones idénticas. Se dice que la multiplicidad de la solución es dos, ya que es un trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow (x+3)^2 = 0$$
$$x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = -3$$
$$x + 3 = 0 \rightarrow x_2 = -3$$

b) El caso restante es cuando ambas soluciones son totalmente distintas, pues representa un trinomio de segundo grado

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow (x+5)(x-3)$$
$$x + 5 = 0 \rightarrow x_1 = -5$$
$$x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = 3$$

5.4 Ecuaciones de segundo grado

La fórmula general permite determinar las soluciones a partir de los coeficientes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El radicando $D = b^2 - 4ac$ recibe el nombre de discriminante y define la naturaleza de las soluciones:

i. Si $D > 0$ las soluciones son reales y desiguales.

ii. Si $D = 0$ las soluciones son reales e iguales.

iii. Si $D < 0$ las soluciones son complejas conjugadas.

En el último caso es necesario introducir la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$. Los polinomios que satisfacen la última propiedad no son factorizables en los reales.

5.4 Ecuaciones de segundo grado

Como ejemplo del último caso resolveremos: $x^2 + x + 1 = 0$

1. Identificar los coeficientes

$$a = 1, b = 1, c = 1$$

2. Sustituir en la fórmula general

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

3. Escribir cada solución

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

5.4 Ejemplos

1. Resuelve las ecuaciones cuadráticas usando la factorización correspondiente.

   a) $2x^2 - 2x - 12 = 0$

   b) $3x^2 - 48 = 0$

   c) $5x^2 - 10x = 0$

   d) $5x^2 - 50x + 125 = 0$

a) $x_1 = 3, x_2 = -2$ b) $x_1 = 4\ x_2 = -4$ c) $x_1 = 0, x_2 = 2$ d) $x_1 = 5, x_2 = 5$

5.4 Ejemplos

2. Resuelve las ecuaciones cuadráticas usando fórmula general.

a) $6x - x^2 - 9 = 0$

b) $4x^2 + 3x - 22 = 0$

a) $x_1 = 3, x_2 = 3$

b) $x_1 = 2\ x_2 = -\frac{11}{4}$

5.4 Ejemplos

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

3. Resuelve por fórmula general las siguientes ecuaciones.

a) $2x^2 - 2x = 1$

b) $3x^2 - 2x + 2 = 0$

a) $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $x_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}i, x_2 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}i$

5.4 Ejemplos

4. Resuelve los siguientes problemas.

a) Hallar dos números positivos sabiendo que uno de ellos es igual al triple del otro, aumentado en cinco, y que el producto de ambos es 68.

b) La longitud de un jardín rectangular es el doble del ancho; si éste se aumenta en 6m, y la longitud en 40m, el área se duplica. ¿Cuáles son las dimensiones del jardín?

a) $4, 17$

b) $Ancho: 30\ m, Largo: 60\ m$

5.4 Ejercicios

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado factorizando.

a) $2x^2 - 21 = 0$

b) $5x - 2x^2 = 2$

c) $x = 15 + (x + 5)(x - 3)$

d) $12x^2 + 36x + 27 = 0$

e) $\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-4} = \frac{5}{4}$

5.4 Ejercicios

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado por fórmula general.

a) $x^2 + 1 = 0$

b) $4(4x - 1) = 4x^2 - 12x + 9$

c) $\frac{3}{x+2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}$

5.4 Ejercicios

3. Resuelve los siguientes problemas.

   a) La suma de dos números es nueve y la suma de sus cuadrados es cincuenta y tres. Hallar los números.

   b) El área de un terreno rectangular es 216 unidades cuadradas. Si su perímetro es 60 unidades, ¿cuáles son sus dimensiones?