∫ntegrando.

CURSOS ACADÉMICOS

CURSOS ACADÉMICOS

Capítulo 2

Probabilidad

Temario del capítulo 2

∫ntegrando.
CURSOS ACADÉMICOS

2.1 Conjuntos

Un conjunto es una colección de objetos con características similares y bien definidas.

Los constituyentes de un conjunto reciben el nombre de elementos. Si dos o más elementos se repiten, no se hace distinción entre ellos.

Para denotar los conjuntos se emplean letras mayúsculas:

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{Carlos, Luis, Silvia, Andrea\}$$

$$C = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

2.1 Conjuntos

Es posible definir un conjunto en dos formas:

a) Extensiva: Consiste en escribir explícitamente la lista de sus elementos.

b) Intensiva: Cuando se expresa al conjunto como un todo a partir de una regla que cumplen sus elementos

Por ejemplo, si A es el conjunto de los números naturales

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$ Por extensión

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$$ Por comprensión

2.1 Conjuntos

∫ntegrando.
CURSOS ACADÉMICOS

De acuerdo con los elementos por los que se conforma un conjunto, existen dos conjuntos importantes:

i. Conjunto universal: Denotado por $\mathbb{U}$, es aquel que contiene todos los elementos de interés en una situación determinada

ii. Conjunto vacío: Simbolizado como ϕ es aquel conjunto sin elementos

El conjunto universo no es único ya que depende de cada problema.

2.1 Conjuntos

Para representar gráficamente un conjunto se utilizan los diagramas de Venn.

Un conjunto se visualiza como un círculo, cuyos puntos interiores son elementos del mismo. El universo se representa con un rectángulo.

2.1 Conjuntos

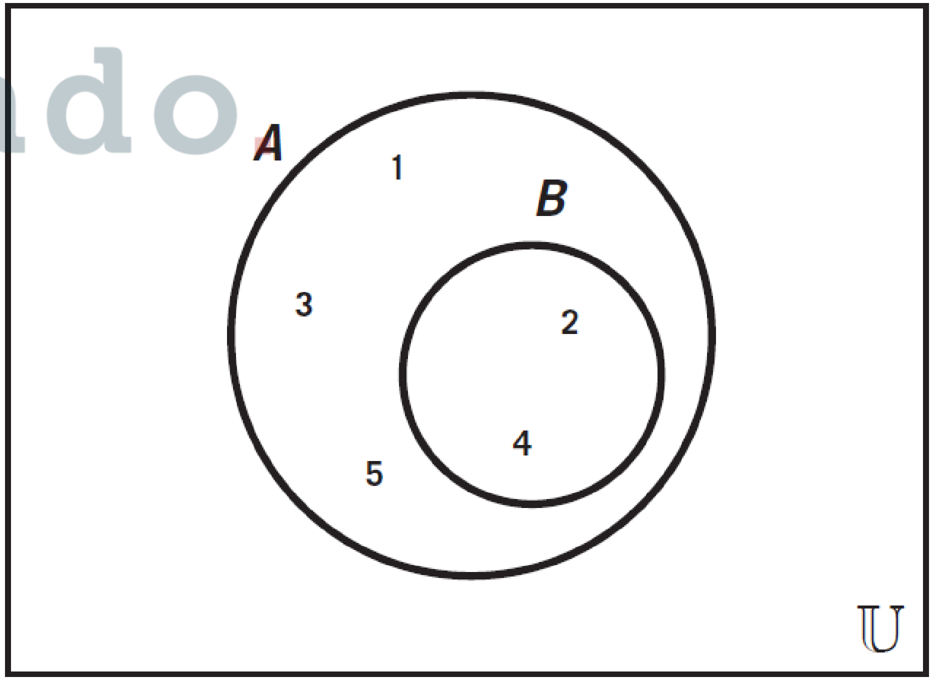
Cuando todos los elementos de un conjunto A pertenecen a otro conjunto B, pero B tiene por lo menos un elemento más que A, se dice que A es subconjunto propio de B

$$A \subset B$$

Como ejemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{2, 4\}$$

$$B \subset A$$



2.1 Conjuntos

Se conoce como cardinalidad n al número de elementos que forman un conjunto.

Cuando un mismo elemento aparece más de una ocasión, para la cardinalidad solo se cuenta una única vez

Puesto que un conjunto no tiene límites en el número de objetos que puede contener, la cardinalidad puede ser finita o infinita

$$D = \{d \mid d \; es \; un \; día \; de \; la \; semana\}, \qquad n(D) = 7$$

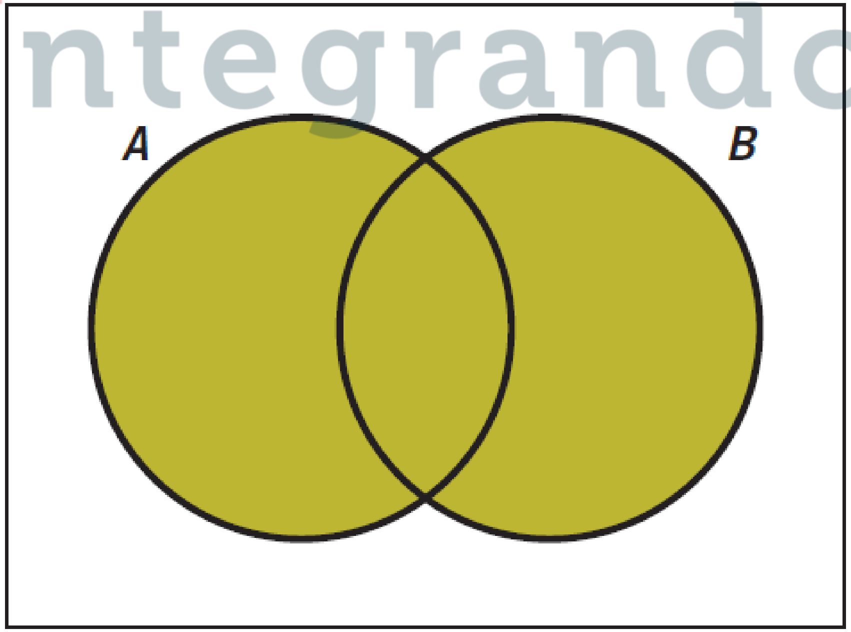
$$S = \{x \mid x \; es \; un \; múltiplo \; de \; 6\}, \qquad n(S) \to \infty$$

2.1 Conjuntos

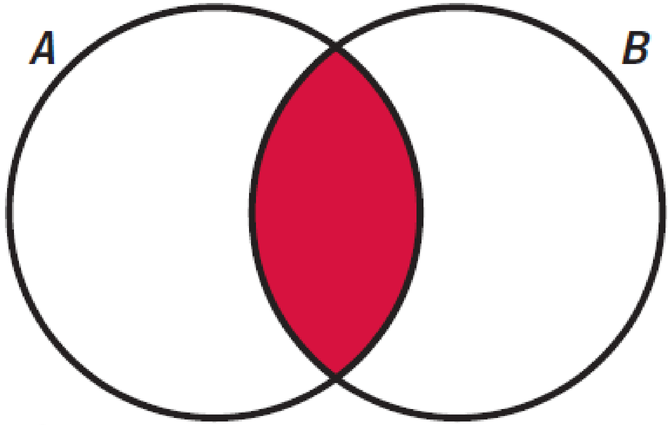
Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

También es posible definir operaciones binarias entre dos conjuntos A y B o unarias para uno solo:

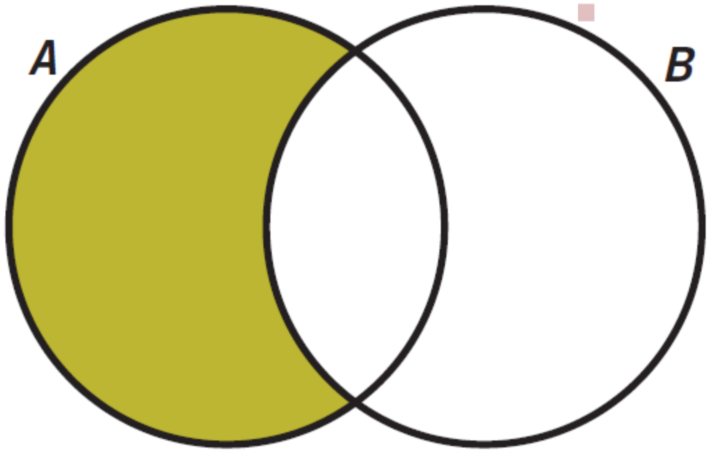
1. Unión: Denotada por $A \cup B$ es igual al conjunto con todos los elementos de A, B o de ambos



2.1 Conjuntos



2. **Intersección:** Expresada como $A \cap B$ es el conjunto de los elementos que se encuentran en A y B simultáneamente

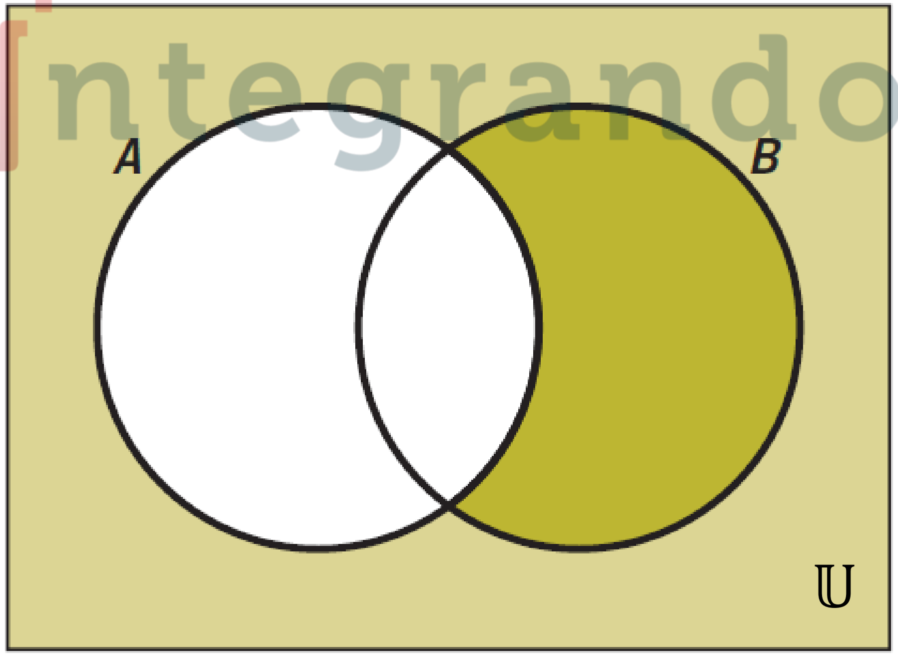


3. **Diferencia:** Se simboliza como $A - B$ y es el conjunto de los elementos que están en A pero no en B

2.1 Conjuntos

4. **Complemento:** Es una operación unaria sobre un conjunto A; se denota por A^c y representa a todos los elementos del universo que no están en A. Se puede escribir como

$$A^c = \mathbb{U} - A$$



2.1 Conjuntos

Ꞁntegrando. CURSOS ACADÉMICOS

Para encontrar la cardinalidad de la unión de dos conjuntos hay que tomar en cuenta que, para no contar dos veces un mismo elemento, se debe restar la cardinalidad de la intersección

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Por ejemplo:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}, \qquad B = \{5,6,7,8,9\}$$

$$n(A) = 6, \qquad n(B) = 5$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \qquad A \cap B = \{5,6\}$$

$$n(A \cap B) = 2$$

$$n(A \cup B) = 6 + 5 - 2 = 9$$

2.1 Ejemplos

1. Dados los conjuntos: $A = \{b, c, d, f, g\}$, $B = \{a, b, e, f\}$, $\mathbb{U} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ determina:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - B$

d) $B - A$

a) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ b) $\{b, f\}$ c) $\{c, d, g\}$ d) $\{a, e\}$

2.1 Ejemplos

1. Dados los conjuntos: $A = \{b, c, d, f, g\}$, $B = \{a, b, e, f\}$, $\mathbb{U} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ determina:

e) A^c, B^c

f) $n(A)$, $n(B)$

g) $n(A \cap B)$, $n(A \cup B)$

e) $\{a, e\}$, $\{c, d, g\}$ f) $5, 4$ g) $2, 7$

2.1 Ejercicios

1. ¿Cuáles conjuntos son iguales $\{x, y, z\}, \{z, y, z, x\}, \{y, x, y, z\}, \{y, z, x, y\}$?

2. Enumera los elementos de cada conjunto e indica su cardinalidad:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 9\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 5 = 4\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 2x - 15 = 0\}$

2.1 Ejercicios

3. Sea $\mathbb{U} = \{1, 2, \dots, 9\}$ el conjunto universo, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Determina:

   a) $A \cup B$ y $n(A \cup B)$

   b) $A \cap B$ y $n(A \cap B)$

   c) $A - B$ y $n(A - B)$

   d) A^c y $n(A^c)$

2.2 Técnicas de conteo

En ciertas situaciones necesitamos conocer el número de combinaciones posibles en que puede llevarse a cabo un proceso de varias secuencias disponibles.

Principio aditivo del conteo:

Si una operación puede realizarse de m formas y otra en n formas, y ambas no pueden llevarse a cabo simultáneamente, el total de maneras en que se pueden realizar es $m + n$

Principio multiplicativo del conteo:

Si un evento se puede realizar de m formas y un segundo evento de n formas, entonces ambos eventos pueden realizarse juntos de $m \cdot n$ formas

2.2 Ejemplos

1. Una persona quiere comprar un par de zapatos. Cuando llega a la zapatería solo encuentra dos modelos diferentes de su talla. De uno hay dos colores diferentes, del otro hay cinco. ¿De cuántas maneras diferentes puede realizar su compra?

2. Sarah va a un restaurante en el que ofrecen una sopa, una ensalada y un sándwich. Si ofrecen 3 sopas, 3 ensaladas y 6 sándwiches para elegir, ¿cuántos platillos diferentes se pueden formar?

a) 7 b) $54\ platillos$

2.2 Ejemplos

3. En el estado de Pennsylvania, los números telefónicos constan de 10 dígitos. Los 3 primeros son la LADA y los 7 restantes el número local. ¿Cuántos teléfonos diferentes existen, si los números locales no pueden empezar con 0 o 1?

a) 8×10^6

2.2 Ejercicios

1. En una tienda de ropa, tienes la opción de elegir entre 5 camisetas y 4 pantalones.
   a) Si solamente cuentas con lo suficiente para comprar una prenda, ¿cuántas maneras diferentes tienes para elegir tu compra?

   b) Si deseas comprar un conjunto que tenga una camiseta y un pantalón, ¿de cuántas formas diferentes puedes escoger el conjunto?

2. En una pizzería, puedes crear tu propia pizza personalizada. Puedes elegir entre 3 tipos de masas, 5 tipos de salsas y 7 ingredientes diferentes. ¿Cuántas combinaciones únicas de pizzas puedes hacer?

2.2 Ejercicios

3. Se desea formar claves de tres cifras con los dígitos 0, 1, 2 y 3.
   a) Si los dígitos no pueden repetirse, ¿cuántas claves diferentes existen?

   b) Si los dígitos pueden repetirse, ¿cuántas claves diferentes existen?

4. ¿Cuántos resultados diferentes pueden obtenerse en el lanzamiento de dos dados? Considera que el orden sí importa.

2.2 Técnicas de conteo

Cuando en un arreglo el orden de los eventos es importante, al intercambio de posición de uno con otro se le conoce como permutación.

Entonces, las permutaciones son las formas distinguibles en que pueden ordenarse todos o una parte de los elementos.

El número de permutaciones de n objetos distintos es $n!$

El número de permutaciones de n objetos distintos, tomando r a la vez, es

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

2.2 Ejemplos

4. ¿Cuántas palabras distintas de seis letras pueden formarse con las letras A, B, C, D, E y F?

5. ¿Cuántas palabras de cuatro letras pueden formarse con las mismas letras de la pregunta anterior?

a) 720 b) 360

2.2 Ejercicios

1. ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar 4 personas en 4 sillas?

2. ¿Cuántas palabras de 5 letras pueden formarse con las vocales si no pueden repetirse?

3. En una competencia de atletismo, hay 6 finalistas en una carrera de 100 metros planos. ¿De cuántas formas diferentes se pueden otorgar los 3 primeros lugares?

4. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar 5 libros de una estantería que contiene 8?

2.2 Técnicas de conteo

Si en un conjunto de n objetos se tienen n_1 objetos de un tipo, n_2 de otro y hasta n_k de otro, el número de permutaciones diferentes de los n objetos es

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}$$

Si el orden en el que se escoge una parte de los miembros de un conjunto no es importante, a las formas indistinguibles de acomodar un subconjunto de elementos se le llama combinaciones.

Las combinaciones de n objetos distintos, tomando r a la vez es

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

2.2 Ejemplos

6. ¿De cuántas formas diferentes puede escribirse una palabra de seis letras con las letras BANANA?

7. ¿De cuántas maneras se pueden elegir tres letras del conjunto $\{A, B, C, D, E\}$ si el orden no es importante?

a) 60 b) 10

2.2 Ejercicios

1. Encuentra el número de permutaciones diferentes que pueden realizarse en la palabra *acacia.*

2. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar las letras de la palabra *Mississippi*?

3. Se forman señales con 8 banderas de colores. Si hay 3 rojas, 2 blancas y el resto son azules, ¿cuántas señales diferentes se pueden formar?

4. En un torneo de ajedrez, hay 8 jugadores. ¿Cuántas equipos de 2 jugadores se pueden formar para jugar una partida?

2.2 Ejercicios

3. Una caja contiene ocho calcetines cafés y seis calcetines negros. Encuentra el número de combinaciones en que es posible extraer dos calcetines de la caja si:
   a) No importa el color

   b) Deben ser del mismo color

4. En un curso hay 10 estudiantes; 6 varones y 4 mujeres. Encuentra el número de formas para elegir un comité de 4 miembros con 2 varones y 2 mujeres.

2.3 Probabilidad de eventos simples

En la naturaleza existen leyes que permiten predecir con certeza el desarrollo de un fenómeno; a éstos se les llama deterministas.

Sin embargo, existen situaciones dentro y fuera de la naturaleza en las que el resultado no puede ser conocido de ante mano, sino solo los posibles resultados y qué tan viable es que unos ocurran más veces que otros. Estos se denominan aleatorios.

La probabilidad es una descripción matemática que permite analizar el comportamiento de fenómenos aleatorios y medir qué tan factible es que se obtenga un resultado. Su valor siempre está entre 0 (evento imposible) y 1 (certeza).

2.3 Probabilidad de eventos simples

Ɉntegrando.
CURSOS ACADÉMICOS

Los conceptos más relevantes en el estudio de la probabilidad son:

i. **Experimento:** Realización de una acción específica que puede repetirse bajo las mismas condiciones y que permite establecer un conjunto de resultados

ii. **Espacio muestral:** Conjunto de todos los posibles resultados que pueden ocurrir en un experimento

iii. **Evento:** Conjunto de uno o más resultados de un experimento. Puede ser simple cuando no depende de otro, o conjunto cuando intervienen más de uno

Por ejemplo, en el *experimento* de lanzar un dado, el *espacio muestral* es cualquiera de los números entre 1 y 6, un *evento simple* sería obtener un 5, mientras que un *evento conjunto* sería obtener un número impar mayor que 3.

2.3 Probabilidad de eventos simples

A su vez, existen dos enfoques para definir la probabilidad de un evento:

a) **Clásico (a priori):** Basado en la suposición de que todos los resultados posibles de un experimento son igualmente probables. Su expresión es

$$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ totales}$$

b) **Empírico (a posteriori):** Tras repetir exhaustivamente un experimento, se elabora una tabla de frecuencias con todos los posibles resultados; a cada uno se le asigna una probabilidad como

$$P = \frac{No.\ de\ veces\ que\ ocurrió}{No.\ de\ experimentos\ realizados}$$

2.3 Ejemplos

1. En una caja hay 10 pelotas, de las cuales seis son rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota roja?

2. Si dos monedas se lanzan al aire, ¿cuál es la probabilidad de que ambas caigan cara arriba?

a) 0.6 b) 0.25

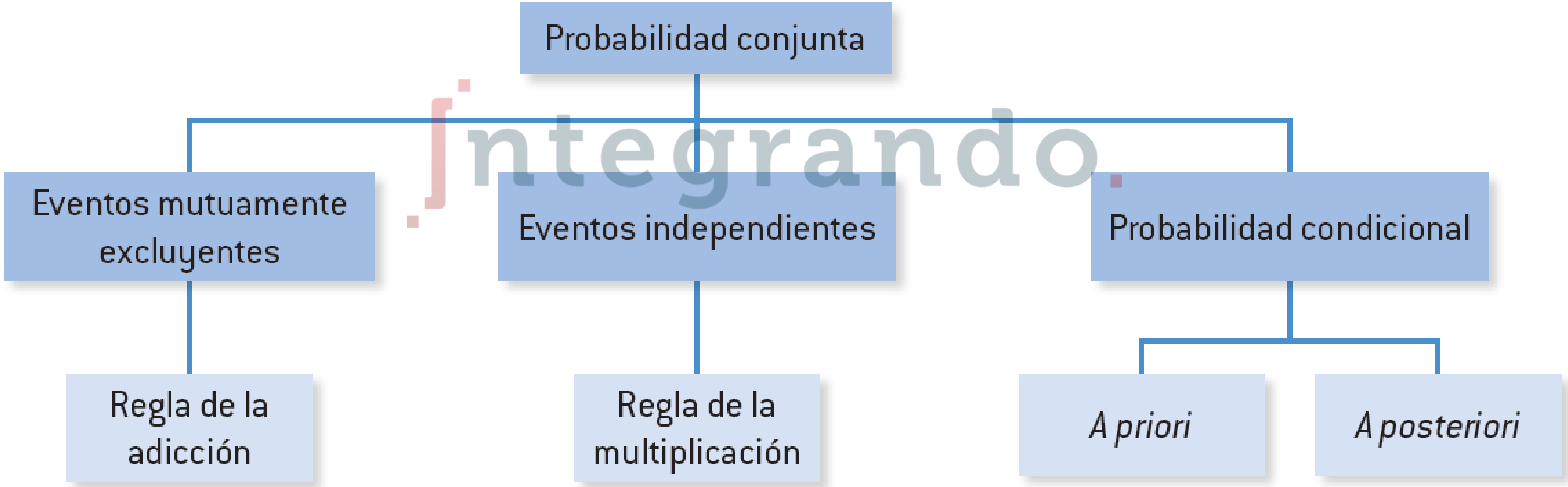
2.3 Ejemplos

3. Dos dados se lanzan al aire al mismo tiempo.
   a) Determina la cardinalidad del espacio muestral
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de ambos resultados sea igual a 7?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea mayor que 7?

a) 36 b) $1/6$ c) $5/12$

2.4 Probabilidad de eventos conjuntos

En los eventos conjuntos se toman en cuenta dos o más eventos simples, los cuales pueden ser mutuamente excluyentes, independientes o condicionales



2.4 Probabilidad de eventos conjuntos

∫ntegrando.
CURSOS ACADÉMICOS

i. Decimos que dos eventos son disjuntos o mutuamente excluyentes cuando ambos no tienen resultados comunes, es decir, la intersección de ambos es cero

Si A, B son mutuamente excluyentes: $P(A \cap B) = 0$

Si se desea calcular la probabilidad de la unión de ambos conjuntos, y sabemos de ante mano que no tienen elementos en común, entonces dividimos la cardinalidad de la suma de ambos por el total de datos

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{N} = \frac{n(A)}{N} + \frac{n(B)}{N} = P(A) + P(B)$$

2.4 Probabilidad de eventos conjuntos

Puesto que los conjuntos A y A^c son mutuamente excluyentes, y *la suma de las probabilidades de todos los casos posibles debe ser uno*, la probabilidad de que no ocurra un evento A es

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Si los eventos no son excluyentes entre sí, entonces debe tomarse en cuenta el número de elementos que existen en la intersección de ambos.

De forma general, para la unión de dos conjuntos, la probabilidad es

$$P(A \cup B) = \frac{n(A)}{N} + \frac{n(B)}{N} - \frac{n(A \cap B)}{N} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2.4 Ejemplos

1. El departamento de recursos humanos de una compañía ha recopilado los años que llevan trabajando sus trabajadores y sus resultados se muestran en la tabla. Si se escoge un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga a) 4 o menos años y b) 9 o menos años?

Años de servicio	Número de empleados
$0-4$	157
$5-9$	89
$10-14$	74

a) 0.49 b) 0.77

2.4 Ejemplos

2. En una empresa se reciben 500 solicitudes de empleo, de las cuales 325 son mujeres y el resto de hombres. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una solicitud al azar provenga de un hombre?

3. En una escuela se realizó un estudio sobre el porcentaje de aprobación en física y matemáticas. La probabilidad de que un estudiante apruebe matemáticas es del 60%, de aprobar física es 55% y 35% de aprobar ambas. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe matemáticas o física?

a) 0.35 b) 80%

2.4 Probabilidad de eventos conjuntos

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

ii. Dos eventos se dicen independientes cuando la ocurrencia de uno de ellos no puede afectar el resultado del otro

La probabilidad de obtener simultáneamente un resultado A en un experimento y un resultado B en otro se calcula a partir del principio multiplicativo del conteo

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Si no son independientes y la ocurrencia de A afecta la de B, la probabilidad de que A y B ocurran en este orden es

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

2.4 Ejemplos

4. Calcular la probabilidad de obtener un 2 en un tiro de dado y sello en un tiro de moneda.

5. La probabilidad de que Juan resuelva un problema de álgebra es de $3/4$, mientras que la de Carlos es $2/3$.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno lo resuelva?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno lo resuelva?

a) $1/12$ b) $1/12,\ 11/12$

2.4 Ejemplos

6. Una urna contiene 8 bolas rojas y 7 verdes. Se sacan al azar 2 bolas, una después de otra, sin haber regresado la primera. Calcular la probabilidad de:
   a) Que la primera sea roja
   b) Que la segunda sea verde
   c) La de ambas en este orden

a) $8/15$ b) $1/2$ c) $4/15$

2.4 Probabilidad de eventos conjuntos

Integrando.
CURSOS ACADÉMICOS

iii. Cuando un evento influye causalmente en que ocurra otro, el segundo está condicionado por la ocurrencia del primero

La probabilidad condicional de que se presente el evento A, una vez que el evento B ha ocurrido, se calcula como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Cuando se determina una probabilidad condicional el espacio muestral se reduce: puesto que ocurrió B, el espacio muestral tendrá la característica de B.

Es importante señalar que, en general

$$P(A|B) \neq P(B|A)$$

7. En una universidad hay 850 estudiantes que estudian una licenciatura y 650 una ingeniería. Además, en las ingenierías se sabe que hay 350 mujeres, en tanto que hay 250 hombres estudiando la licenciatura. Determina la probabilidad de que, si se escoge un alumno al azar:
   a) Estudie ingeniería, dado que es hombre
   b) Si estudia una licenciatura, entonces es mujer

a) 54.5% b) 70.6%

2.5 Distribuciones de probabilidad

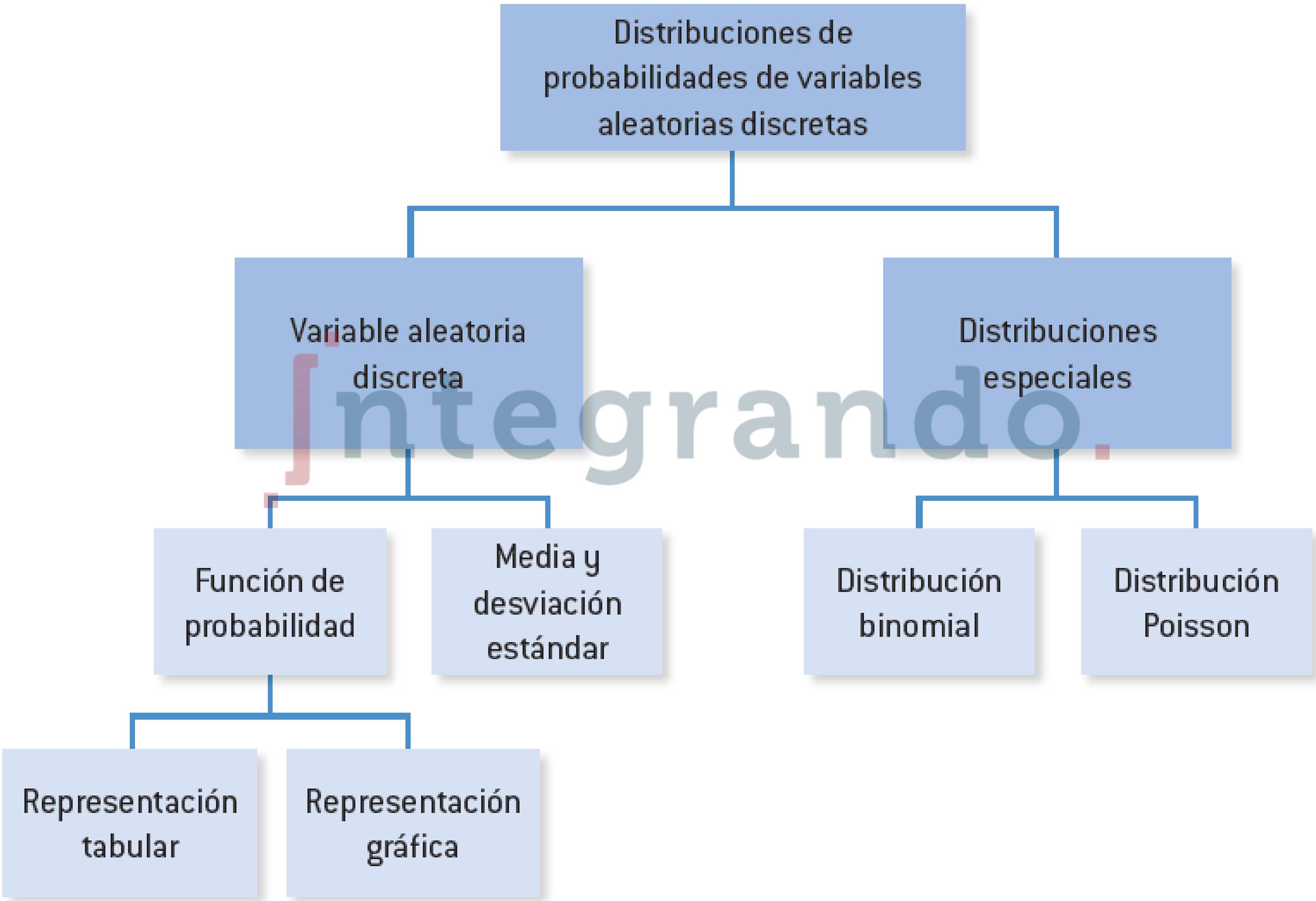
Una variable aleatoria permite describir numéricamente el espacio muestral de un experimento mediante una función.

A una variable X se le asigna una distribución de probabilidad $P(X)$, que arroja un valor numérico $P(X_i)$ específico para cada valor X_i de la variable aleatoria.

Las variables pueden ser discretas o continuas, y las distribuciones pueden representarse de varias formas

i. Tabular: una tabla con los posibles valores de la variable y su probabilidad
ii. Gráfica: mediante un gráfico de barras o histograma
iii. Funcional: escribiendo explícitamente la regla con la que se asigna un valor

2.5 Distribuciones de probabilidad



2.5 Distribuciones de probabilidad

La función de distribución de probabilidad debe cumplir lo siguiente:

1. $0 \leq P(X_i) \leq 1$
2. $\sum_{i=1}^{n} P(X_i) = 1$

El valor esperado $\mu = E(X)$ es una medida central igual al promedio ponderado de los valores de la variable. La varianza $\sigma^2 = Var(X)$ mide la dispersión de la variable y es igual al promedio ponderado de las distancias cuadradas de cada valor con respecto al valor esperado

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} P(X_i) \cdot X_i$$

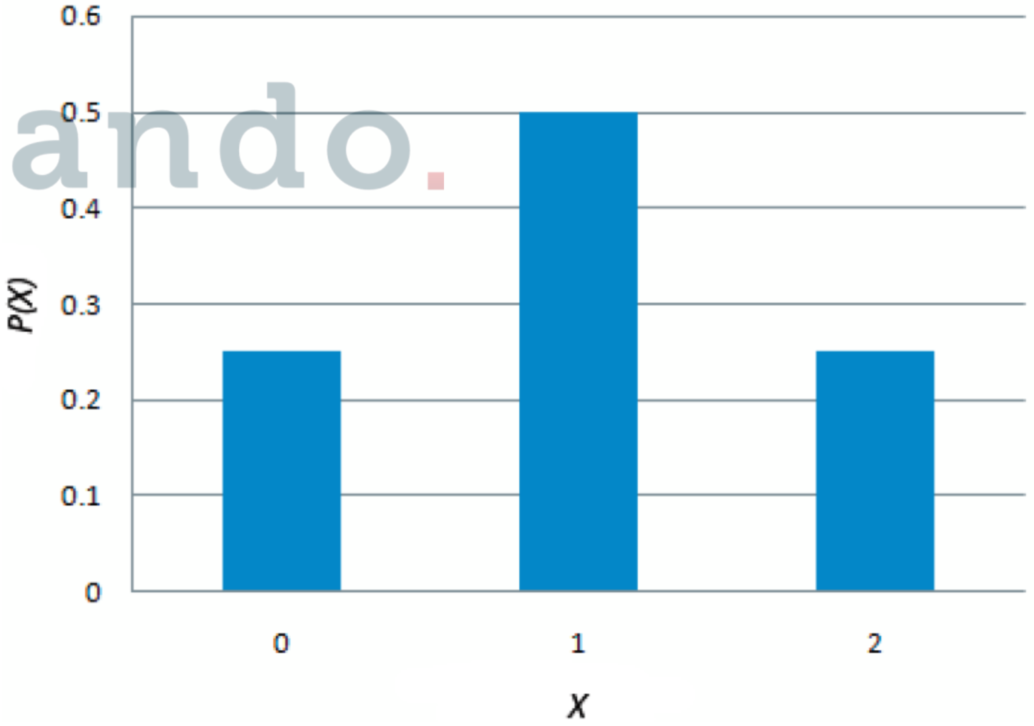
$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} P(X_i)(X_i - \mu)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Las ponderaciones son las probabilidades

2.5 Ejemplos

1. Se lanzan dos monedas ordinarias y se designa a la variable aleatoria X como el número de águilas observadas. Determina:
   a) El conjunto del espacio muestral de lanzar dos monedas
   b) Una tabla para la distribución de probabilidad
   c) La representación gráfica de la distribución

Resultados posibles	X_i	$P(X_i)$
$\{A, A\}$	2	$1/4$
$\{A, S\}, \{S, A\}$	1	$1/2$
$\{S, S\}$	0	$1/4$



a) $\{\{A, A\}, \{A, S\}, \{S, A\}, \{S, S\}\}$

2.5 Ejemplos

1. Se lanzan dos monedas ordinarias y se designa a la variable aleatoria X como el número de águilas observadas. Determina:
   d) El valor esperado
   e) La varianza
   f) La desviación estándar

d) $\mu = 1$ e) $\sigma^2 = 0.5$ f) $\sigma = 0.71$

2.5 Distribuciones de probabilidad

Una de las distribuciones más importantes es la distribución binomial; se utiliza cuando se realiza una serie de experimentos en los cuales solo existen dos resultados posibles.

Si p representa la probabilidad de ocurrencia uno de los resultados de la variable X y $q = 1 - p$ la probabilidad de que no ocurra, la probabilidad de obtener r aciertos en n repeticiones es

$$P_B(X = r) \ = \ {}_nC_r \cdot p^r \cdot q^{n-r}$$

El valor esperado y la varianza para una variable de este tipo están dados por

$$\mu = np \qquad\qquad \sigma^2 = npq$$

2.5 Distribuciones de probabilidad

Ʃntegrando. CURSOS ACADÉMICOS

Otra de las distribuciones es la distribución de Poisson cuyo objetivo es determinar la probabilidad de que un evento determinado ocurra durante un intervalo de tiempo o espacio, siempre que se conozca el promedio en el mismo intervalo.

La probabilidad de que la variable X se presente un número de veces k, siendo λ el promedio de eventos que ocurren por unidad de tiempo o espacio, es igual a

$$P_P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

Resulta que en este distribución el valor esperado y la varianza son iguales al promedio de eventos

$$\mu = \lambda \qquad \sigma^2 = \lambda$$

2. El equipo de Pumas fue líder del torneo clausura 2011 hasta la jornada 16. Entonces, Pumas enfrentó al Necaxa y resultó que de 8 tiros al arco, anotó un gol. Si en el partido siguiente dispara 6 veces a la portería:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de Pumas de anotar dos goles?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que anote máximo dos goles?

a) $P_B(X = 2) = 0.14$ b) $P_B = (X \leq 2) = 0.97$

2.5 Ejemplos

Integrando. CURSOS ACADÉMICOS

3. Continuando con el equipo de Pumas, hasta la jornada 16, en promedio, anotaron 1.69 goles cada 90 minutos.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que Pumas anote dos goles en los próximos en 90 min?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que anote cuando mucho un gol durante el primer tiempo?

a) $P_P(X = 2) = 0.26$ b) $P_P = (X \leq 1) = 0.79$